

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLVIII.

I. *Electromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung; von H. von Helmholtz.*

Eine genügende Erklärung der Farbenzerstreuung auf Grundlage der electromagnetischen Theorie des Lichtes scheint mir bisher gänzlich zu fehlen. Dass eine solche nicht ohne Rücksichtnahme auf die ponderablen Massen, die dem Aether eingelagert sind, zu bilden ist, dürfte keinem Zweifel unterliegen, da die Dispersion des Lichtes zu denjenigen Vorgängen gehört, welche, wie auch die Brechung desselben, die galvanische Leitung, die Ansammlung wahrer Electricität und das Bestehen magnetischer Pole niemals im reinen Aether eines Vacuum, sondern nur in oder an der Grenze von Räumen vorkommen, die ausser dem Aether auch ponderable Masse enthalten. Nun zeigt die mathematische Theorie von Maxwell allerdings an, dass auch ponderomotorische Kräfte innerhalb des von electrischen Oscillationen durchzogenen Aethers wirksam werden müssen und eventuell schwere Atome, die im Aether liegen, in Bewegung setzen könnten. Aber wenn die ponderablen Theilchen nicht selbst electrisch sind, wären diese Kräfte den *Quadraten* der electrischen und magnetischen Momente des oscillirenden Aethers proportional, und also für negative Werthe derselben in Grösse und Richtung gleich denen für positive. Sie würden deshalb während jeder Schwingungsperiode zweimal ihren grössten und zweimal ihren kleinsten Werth erreichen, sodass sie in der Regel nicht Schwingungen von der Länge einer einfachen Periode hervorbringen oder unterstützen könnten.

Nur wenn die wägbaren Theilchen Ladungen wahrer Electricität enthalten, können die periodischen Wechsel der electrischen Momente im Aether ponderomotorische Kräfte der gleichen Periode hervorbringen. Die entsprechende Annahme,

dass eingelagerte Atome nur nördlichen oder nur südlichen Magnetismus enthalten sollten, lasse ich als zu unwahrscheinlich bei Seite liegen. Dagegen haben uns die electrolytischen Erscheinungen, namentlich Faraday's Gesetz der electrolytischen Aequivalente, schon längst zu der Annahme geführt, dass electriche Ladungen von bestimmter Grösse an den Valenzstellen chemisch verbundener Ionen haften, die bald positiv, bald negativ sein können, aber überall dieselbe absolute Grösse für jede Valenzstelle eines jeden Atoms haben müssen.

Ogleich diese Annahme die Electricität wieder an einen substantiellen Träger heftet, so ist sie in keiner Weise im Widerspruch mit Maxwell's mathematischer Formulirung seiner Theorie. Denn auch in dieser kommt die Möglichkeit unveränderlicher Ladung gewisser Volumenelemente in Isolatoren vor, und Maxwell's Gleichungen sagen aus, dass die Quanta bei allem Wechsel electriche, magnetische und ponderomotorische Bewegungen unverändert bleiben, wenn sie auch nach seiner Deutung der Erscheinungen nur als Integrationsconstanten, nicht als reelle Substanzen anzusehen sind.

Dass schliesst nicht aus, dass die Kräfte, die von diesen Ionen als ihren Centren ausgehend sich im Raume ausbreiten, bei eintretenden Lageänderungen der Molecüle sich in solcher Art verändern, und im Raume fortschieben, wie es Maxwell's Gleichungen beschreiben.

Das Einzige, was die electrochemische Theorie mehr verlangt, als bisher in Maxwell's Gleichungen vorgesehen ist, ist die Möglichkeit, dass diese Centralpunkte electriche Kräfte bei chemischen Umsetzungen von einem zum anderen Ion herübergleiten können, und zwar unter grosser Arbeitsleistung, so als ob sie an einem substantiellen Träger haften, der von den Valenzstellen verschiedenartiger Ionen mit verschiedener Kraft angezogen würde.

Wird der ein Paar verbundener Ionen umgebende Aether von electriche Kräfte getroffen und dadurch dielectriche polarisirt, so werden die entgegengesetzt polarisirten Ionen den in Richtung der Kraftlinien fallenden Spannungen ausgesetzt, also zwei gleich grossen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte, die mit einander ein Kräftepaar bilden, welches

den Schwerpunkt des Molecüls nicht in Bewegung setzen, wohl aber die electricische Axe des Molecüls verlängern oder verkürzen, sie der Richtung der Kraftlinie zu- oder ablenken würde.

Wir wollen im Folgenden die Bezeichnungsweise meines letzten Aufsatzes vom Mai d. J. beibehalten, und also die Componenten der electricischen Momente der Volumeneinheit mit \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} bezeichnen. Dabei ist aber zu bemerken, dass in den dort aufgestellten Gleichungen die Momente \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} betrachtet werden, als nur abhängig von den electricischen Kräften X , Y , Z , und diesen proportional. Die möglicherweise in einzelnen Stellen des Raumes lagernde *wahre Electricität*, deren Dichtigkeit in Gleichung (1) mit

$$(1) \quad \sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$$

bezeichnet wurde, spielt dort allerdings eine Rolle, indem sie Vertheilung und Richtung der Momente mit bestimmt. Aber sie wird nicht derjenigen Electricität zugerechnet, welche die Polarisation der Volumenelemente bewirkt. So sind auch in den nun zu bildenden Bewegungsgleichungen die electricischen Momente, welche durch die wahre Electricität der Ionen gebildet werden, da sie von veränderlicher Grösse und Richtung sind, und auch von nicht electricischen Kräften, Beharrungsvermögen, Reibung etc. angegriffen werden, von denen des freien Aethers zu trennen; wir bezeichnen sie mit \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} , für die Volumeneinheit. Ein solcher mit Aether und Ionenpaaren gefüllter Raum würde für die theoretische Betrachtung nach der älteren Vorstellung von der Existenz bipolarer magnetischer Molecüle, dem Innern eines magnetisirten Körpers ganz analog sein, und da die Gesetze der Vertheilung magnetischer und electricischer Kräfte für ruhende Zustände aus Maxwell's Theorie sich vollkommen übereinstimmend mit denen von Poisson's Theorie ergeben, die mit magnetischen Molecülen und Fernkräften rechnet, so lassen sich auch die aus jener älteren Theorie hergeleiteten Berechnungen des Energievorrathes in den Volumenelementen eines solchen Raumes mit molecularer Vertheilung der Electricität hier verwenden. Dass sowohl die Erscheinungen der dielectricischen Polarisation, wie die der ponderomotorischen Kräfte solcher

polarisirter Massen auf denselben Werth der Energie zurückführen, habe ich in einem früheren Aufsätze erwiesen.¹⁾

Nach der hier aufgestellten Hypothese unterscheiden sich unsere Ionenpaare von den dielectrisch polarisirten Molecülen isolirender Substanzen nur dadurch, dass sie träge Masse haben und deshalb nicht immer in der Gleichgewichtslage sich befinden, vielmehr um diese oscilliren können, sodass die x, y, z unabhängig von den $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sich verändern können, und dass also die potentielle Energie der Electrisirung nicht bloß von den letzteren drei Grössen, sondern auch von den ersteren abhängt. Ich habe es vorgezogen, statt von den Maxwell'schen Gleichungen auszugehen, die neu hinzukommenden Einflüsse in die von mir für die Electrodynamik entwickelte Form des Principis der kleinsten Wirkung aufzunehmen, weil man dadurch vor dem Uebersehen einzelner nothwendig vorhandener Gegenwirkungen in dem hier schon ziemlich verwickelten Spiel der Kräfte geschützt wird, und dadurch die Anzahl der unabhängigen Hypothesen von zweifelhafter Richtigkeit wesentlich vermindert wird.

Uebereinstimmend mit Poisson und Maxwell setzen wir die electriche Kraft, welche nothwendig ist um ein Moment x in der Volumeneinheit einer mit bipolaren Molecülen beladenen Substanz hervorzubringen, diesem Momente proportional also

$$(11) \quad X = \frac{1}{g} \cdot x, \quad Y = \frac{1}{g} \cdot y, \quad Z = \frac{1}{g} \cdot z.$$

Darin ist, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Polarisationsstärke, g eine Constante. Wenn wir mit $\delta x, \delta y, \delta z$ verschwindend kleine Aenderungen dieser Werthe bezeichnen, so erhalten wir

$$(11a) \quad X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z = \frac{1}{2g} \delta [x^2 + y^2 + z^2].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar gleich der Arbeit, welche die polarisirenden Kräfte bei der Aenderung der Momente gethan haben, und deshalb stellt die rechte Seite der

1) Vgl. meinen Aufsatz: „Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte“ in Monatsber. d. Berl. Akad., 17. Febr. 1881. — Wied. Ann. 13. p. 385—400. Gleichung (2) und (4c), nebst den Bemerkungen am Schlusse.

Gleichung die Aenderung der durch die Polarisation gewonnenen Energie dar, ohne dass die Gültigkeit dieses Ausdruckes, wie in meiner früheren Arbeit, auf den Fall des Gleichgewichts zwischen den polarisirenden Kräften und der dadurch gewonnenen Polarisation beschränkt ist.

Denken wir uns die beweglichen Molecüle, deren Momente wir mit x, y, z bezeichnet haben, eingelagert in ein continuirliches Medium, dessen dielectrische Constante wir mit ϵ bezeichnen, sodass seine Momente und electricischen Spannungen zusammenhängen durch die Gleichungen

$$x = \epsilon \cdot X, \quad y = \epsilon \cdot Y, \quad z = \epsilon \cdot Z,$$

so wird der Werth der electricischen Energie (Gleichung 3a entsprechend):

$$(11b) \quad \Phi_e = \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left\{ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\epsilon} - \frac{x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z}{\epsilon} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\epsilon} \right\}$$

Denkt man sich den Aether zwischen den Molecülen ungemischt mit inducirbarer ponderabler Substanz, so wäre $\epsilon = 4\pi$ zu setzen.

Der zweite, mit Φ_m bezeichnete, magnetische Theil des kinetischen Potentials kann unverändert bleiben, da die Ionen nicht nothwendig ein anderes magnetisches Inductionsvermögen zu haben brauchen als der Aether, und die Unterschiede in Wirklichkeit meist sehr klein sind. Die Anwesenheit permanent magnetisirter Substanz brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Also

$$(11c) \quad \Phi_q = \iiint \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2\mu} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

Der dritte, *electromagnetische*, Theil Φ_q reducirt sich, indem wir die Glieder dritten Grades kleiner Grössen (zu denen aber σ nicht gehört) weglassen auf:

$$(11d) \quad \Phi_q = A \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left\{ u \left(\frac{\partial x}{\partial t} + \alpha \sigma \right) + y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \beta \sigma \right) + z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial t} + \gamma \sigma \right) \right\}$$

Das σ ist überall gleich Null ausser an den electricisch geladenen Stellen der Ionen: also kommen auch deren Geschwindigkeiten in Betracht. Da die electricischen Kräfte, die auf sie wirken, reine Kräftepaare sind, so muss, wie schon bemerkt, der Schwerpunkt der Molecüle in Ruhe bleiben, und unter diesen Umständen ist zu setzen

$$(11e) \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \alpha \cdot \sigma, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \beta \cdot \sigma, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \gamma \cdot \sigma.$$

und also:

$$(11f) \quad \Phi_q = A \iiint dx \cdot dy \cdot dz \left\{ u \frac{\partial}{\partial t} (x+r) + \mathfrak{B} \frac{\partial}{\partial t} (y+\eta) + \mathfrak{B} \frac{\partial}{\partial t} (z+\zeta) \right\}$$

Endlich in den letzten Theil der Arbeit R_1 haben wir einzusetzen mit negativem Vorzeichen, die lebendige Kraft und die Reibung der bewegten Ionen.

$$(11g) \quad \left\{ \begin{aligned} R = & -\frac{1}{2} \iiint m_1 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right] \\ & + \iiint [x \cdot r_1 + y \cdot r_2 + z \cdot r_3] dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned} \right\}$$

wo r_1 , r_2 und r_3 die der Variation nicht unterworfenen Componenten der Reibungskraft darstellen, deren Werth durch

$$(11h) \quad r_1 = k_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial t}, \quad r_2 = k_1 \cdot \frac{\partial y}{\partial t}, \quad r_3 = k_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

ausgedrückt werden mag.

Wenn man nun die Bedingungen dafür sucht, dass

$$(12) \quad \delta \{ \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q + R \} = 0$$

werde, so ergibt sich:

1. Bei Variation der x , y , z

$$(12a) \quad \frac{x-x}{\varepsilon} = A \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{y-y}{\varepsilon} = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \frac{z-z}{\varepsilon} = A \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

woraus auch in der schon früher angewendeten Weise (vgl. Gleichungen (2), (4c) und (4d) der früheren Abhandlung) die Gleichungen gewonnen werden können:

$$(12b) \quad \left\{ \begin{aligned} A \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z-z}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y-y}{\varepsilon} \right) \\ A \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x-x}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z-z}{\varepsilon} \right) \\ A \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y-y}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-x}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \right.$$

2. Bei Variationen der \mathfrak{U} , \mathfrak{V} , \mathfrak{W} :

$$(12c) \quad \begin{cases} A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{X} + r) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu} \right) \\ A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Y} + \mathfrak{y}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mu} \right) \\ A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Z} + \mathfrak{z}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right) \end{cases}$$

3. Endlich bei der Variation nach r , \mathfrak{y} , \mathfrak{z}

$$-\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\vartheta} r - A \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - m_1 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + r_1 = 0,$$

was combinirt mit den Gleichungen (11h) und (12a) gibt:

$$(12d) \quad \begin{cases} + \frac{2\mathfrak{X}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta} r + m_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}; \\ \text{und entsprechend} \\ + \frac{2\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta} \mathfrak{y} + m_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \\ + \frac{2\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta} \mathfrak{z} + m_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \end{cases}$$

Der kürzeren Schreibweise halber setzen wir

$$(12e) \quad \frac{\varepsilon}{2} \frac{1+\vartheta}{\vartheta} = a^2, \quad \frac{\varepsilon}{2} m_1 = m, \quad \frac{\varepsilon}{2} k_1 = k,$$

somit wird

$$(12f) \quad \begin{cases} + \mathfrak{X} = a^2 r + m \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \\ + \mathfrak{Y} = a^2 \mathfrak{y} + m \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} + k \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \\ + \mathfrak{Z} = a^2 \mathfrak{z} + m \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} + k \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \end{cases}$$

System ebener Wellen in Richtung der x -Axe ablaufend.

Setze

$$(13) \quad \mathfrak{Y} = B \cdot e^{in(t+px)}, \quad \mathfrak{X} = C \cdot e^{in(t+px)}, \quad \mathfrak{y} = b \cdot e^{in(t+px)}$$

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{M} = r = \mathfrak{z} = 0,$$

so geben die Gleichungen (12b) für die Werthe der Coefficienten:

$$(13a) \quad \begin{cases} p \frac{(B-b)}{\varepsilon} = AC; \quad \text{und (12c):} \\ A(B+b) = C \frac{p}{\mu}; \end{cases}$$

endlich (12f):

$$(13b) \quad B = a^2 b - m n^2 b + i n k b.$$

Setzt man

$$(13c) \quad \begin{cases} b = h B, & \text{also:} \\ h = \frac{1}{a^2 - m n^2 + i n k}, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen (13a):

$$(13d) \quad \frac{p}{A} \cdot \frac{1-h}{1+h} = \frac{\varepsilon \mu A}{p}.$$

Nach der Art des Vorkommens in den Gleichungen (14) ist offenbar $1/p$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Wenn nicht $k = 0$ ist, wird deren Werth complex sein, was bekanntlich Dämpfung der fortlaufenden Wellen anzeigt.

Um die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes deutlicher zu machen und um die reellen und imaginären Theile voneinander zu trennen, bemerken wir zunächst, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit \mathfrak{G}_0 im continuirlichen Aether gegeben ist durch:

$$(14) \quad \mathfrak{G}_0^2 = \frac{1}{A^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu}.$$

Setzen wir dann

$$(14a) \quad p = -\frac{q}{i n} + \frac{1}{\mathfrak{G}},$$

so ist nach der oben gemachten Anwendung des Exponenten p offenbar \mathfrak{G} die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von uns betrachteten Wellen und q der Dämpfungscoefficient für die Längeneinheit des Weges.

Dadurch wird Gleichung (13d)

$$(14b) \quad p = -\frac{q}{i n} + \frac{1}{\mathfrak{G}} = \frac{1}{\mathfrak{G}_0} \cdot \sqrt{\frac{1+h}{1-h}} \\ \frac{1+h}{1-h} = \frac{a^2 - m n^2 + k i n + 1}{a^2 - m n^2 + k i n - 1}.$$

Setze

$$(14c) \quad \begin{cases} a^2 - m n^2 + 1 = \varrho_0 \cdot \cos \vartheta_0 \\ a^2 - m n^2 - 1 = \varrho_1 \cdot \cos \vartheta_1 \\ k n = \varrho_0 \cdot \sin \vartheta_0 = \varrho_1 \cdot \sin \vartheta_1, \end{cases}$$

wobei ϱ_0 und ϱ_1 immer positiv genommen werden können, und die Winkel ϑ_0 und ϑ_1 in den zwei ersten Quadranten, sodass $\sin \vartheta_0$ und $\sin \vartheta_1$ immer positive Grössen sind, so wird

$$(14d) \quad p = \frac{1}{\mathfrak{G}_0} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{G}_0}{\mathfrak{G}_1}} \cdot e^{\frac{1}{2}i(\vartheta_0 - \vartheta_1)}$$

und

$$(14e) \quad + \frac{q}{in} = \frac{1}{\mathfrak{G}_0} \cdot \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0}} \sin \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1),$$

$$(14f) \quad \frac{\mathfrak{G}_0}{\mathfrak{G}} = \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0}} \cdot \cos \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1).$$

Dieses letztere Verhältniss ist zugleich das Brechungsverhältniss schwach gedämpfter Wellen für die betreffenden Schwingungen bei dem Uebergang aus dem mit beweglichen Moleculen beladenen Aether in den davon freien.

Zu bemerken ist, dass der Wurzelausdruck, der in den beiden Gleichungen (14e) und (14f) vorkommt, in beiden dasselbe Vorzeichen haben muss.

Aus den Gleichungen ergeben sich die Werthe der Tangenten:

$$(14g) \quad \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{kn}{a^2 - mn^2 + 1}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{kn}{a^2 - 1 - mn^2},$$

oder wenn wir

$$(15) \quad N^2 = \frac{a^2 + 1}{m}, \quad P^2 = \frac{a^2 - 1}{m}$$

setzen,

$$(15a) \quad \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{k}{mN} \cdot \frac{1}{\frac{N}{n} - \frac{n}{N}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{k}{mP} \cdot \frac{1}{\frac{P}{n} - \frac{n}{P}},$$

welche zeigen, dass der Winkel ϑ_0 ein rechter wird, wenn $n = N$. N ist aber der Werth, den n annehmen würde, wenn die Phasen der electricischen Verschiebungen \mathfrak{E} im Aether und \mathfrak{r} im Molecul gleiche Richtung haben und ohne Reibung unter dem Einflusse ihrer eigenen Anziehungskräfte vor sich gehen, die in der Constante a^2 zusammengefasst sind.

Wenn $a^2 > m/\varepsilon$ und daher P reell ist, bezeichnet P eine andere kleinere Schwingungszahl, welche eintreten würde, wenn die genannten beiden electricischen Kräfte einander gerade entgegenwirken.

Die in den Gleichungen (15a) für die beiden Tangenten gegebenen Werthe zeigen, dass, wenn die Reibungsconstante k sehr klein ist, die Tangenten nur dann endliche Grösse haben können, wenn auch ihr Nenner nahe gleich Null wird, d. h. n nahehin gleich N oder gleich P wird. Wenn dies eintritt, so

wird für $n = P$ der Winkel $\vartheta_1 = \pi/2$, für $n = N$ dagegen $\vartheta_0 = \pi/2$.

Das Verhältniss der beiden in (14g) und (15a) gegebenen Tangenten findet sich:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 : \operatorname{tg} \vartheta_0 = (N^2 - n^2) : (P^2 - n^2).$$

Da zum absolut grösseren Werthe der Tangente auch der grössere Sinus gehört, und für Winkel die nahehin $= 0$ oder $= \pi$ sind, das Verhältniss der Sinus mit dem der Tangenten zusammenfällt, so ergibt sich hieraus, dass der in den Gleichungen (14e) und (14f) vorkommende Factor $\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_0$ für $n = 0$ den Werth N^2 / P^2 hat, also grösser als Eins ist; für $n = \infty$ dagegen wird $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_0$.

Der genannte Factor wird steigen, bis $n = P$ geworden ist, wird $= 1$ sein, wenn $n^2 = \frac{1}{2}(P^2 + N^2)$; wird noch weiter abnehmen, bis $n = N$ geworden, endlich wenn n sehr gross, wieder zunehmen, bis er für $n = \infty$ wieder $= 1$ geworden ist.

Wie schon früher hervorgehoben, ist $\mathfrak{G}_0 / \mathfrak{G} = n$ das Brechungsverhältniss zwischen leerem und belastetem Aether, dagegen

$$(16) \quad q = \frac{q \cdot \mathfrak{G}}{n}$$

ist der Erlöschungcoefficient für eine Wellenlänge der betreffenden Strahlen, dessen Werth sich auch aus (14e) und (14f) ergibt, gleich

$$(16a) \quad q = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1),$$

$$n^2(1 + q^2) = \frac{\sin(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_0)} = \frac{q_0}{q_1}.$$

Für kleine Werthe von k ergibt sich aus den vorher angestellten Betrachtungen, dass der hier vorkommende Winkel $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ bei $n = 0$ sehr klein ist, bei $n = P$ ziemlich schnell bis nahe an $\pi/2$ steigt und bei $n = N$ wieder ebenso schnell auf seinen früheren Werth zurückgeht. Sein Sinus ist also für $n = 0$, wie für $n = \infty$, sehr klein, zwischen $n = P$ und $n = N$ dagegen wird er nahe gleich 1, und wird also nach Gleichung (16a) zwischen beiden Linien starke Absorption hervorbringen.

Die Werthe des Brechungsverhältnisses dagegen ergeben sich aus obigen Gleichungen:

$$(16b) \quad n = \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0 (1 + q^2)}},$$

sie werden also in dem ganzen Streifen starker Absorption herabgedrückt gegen die durch den Ausdruck $\sqrt{\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_0}$ dargestellten Werthe. Letztere sind aber, wie wir gesehen, auf der Seite vom Absorptionsstreifen gegen das Roth hin höher, als auf der Seite gegen das Violett hin. Es zeigt dieses Verhalten also *anomale Dispersion* an für die neben dem Absorptionsstreifen sichtbar bleibenden Farben.

Bei den farblos durchsichtigen Körpern, bei denen gewöhnlich die Brechungsverhältnisse untersucht worden sind, finden wir in dem sichtbaren Theile des Spectrums keine deutliche Absorption, diese kann nur jenseits der Grenzen desselben vorkommen. Der Verlauf der Curve der Brechungsverhältnisse, wie er der viel gebrauchten Formel von Cauchy zu Grunde liegt, stimmt in unserer Theorie mit dem Theil der Curve für Werthe von n , welche kleiner sind, als P . Es wären also im allgemeinen die Absorptionsstreifen, welche dies veranlassen, jenseits des Ultraviolett zu suchen. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass auch Molecüle vorkommen können mit mehreren eigenen Schwingungsperioden, die mehrere Absorptionsstreifen und entsprechend verwickeltere Brechungsverhältnisse geben.

Zu bemerken ist noch, dass in stark absorbirten Stellen des Spectrums, wo der Factor $\cos \frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1)$ sehr klein wird, unsere Theorie die Möglichkeit offen lässt, dass Brechungsverhältnisse kleiner als 1, oder Geschwindigkeiten höher als im leeren Aether vorkommen, wie das nach den Untersuchungen von Hrn. Kundt in einigen Metallen der Fall ist.

Fälle mit imaginärem P .

Die Fälle, wo

$$a^2 < 1,$$

bei denen P imaginär wird, ergeben einen anderen Verlauf. In diesen wird $\tan(\vartheta_1)$ immer negativ, also $\vartheta_1 > \pi/2$, und desto grösser, je höher n ; wenn k klein ist, ist ϑ_1 immer nur wenig von π unterschieden. Dagegen verhält sich ϑ_0 wie in den früher besprochenen Fällen. Sobald n den Werth N passirt hat, wird auch ϑ_0 sich schnell dem Werthe π nähern. $(\vartheta_2 - \vartheta_0)/2$, welches vorher immer wenig kleiner war als ein Rechter, wird für $n > N$ klein werden, und erst für solche

Werthe würde also die Dämpfung schwach werden, sodass die betreffenden Strahlen gesehen werden könnten. Die Brechung würde ein Minimum in der Gegend von $n = N$ erreichen, von da ab, wo die Strahlen anfangen sichtbar zu werden, weiter steigen und endlich für $n = \infty$ den festen Werth $= 1$ asymptotisch erreichen. Körper von diesem Typus der Brechung lassen sich unter den bisher untersuchten noch nicht erkennen.

Phasendifferenz.

Zu bemerken ist noch, dass aus Gleichung (13c) folgt:

$$(16c) \quad \frac{b}{B+b} = \frac{e^{-i\vartheta_0}}{q_0}.$$

Aus (13a) aber folgt:

$$\frac{B+b}{C} = \frac{p}{A\mu},$$

da andererseits

$$p = \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_0}{q_1}} \cdot e^{\frac{1}{2}i(\vartheta_0 - \vartheta_1)}$$

gefunden ist, ergibt sich

$$\frac{b}{C} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu \cdot q_0 \cdot q_1}} e^{-\frac{1}{2}i(\vartheta_0 + \vartheta_1)}.$$

Daraus geht hervor, dass eine Phasendifferenz zwischen den magnetischen und den ponderablen Schwingungen besteht, welche $\frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_1)$ beträgt. Das Verhältniss ihrer Amplituden wird durch den ersten Factor bestimmt:

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu \cdot q_0 \cdot q_1}}.$$

Die Grössen q_0 und q_1 können nicht Null werden, aber sie werden bei kleinem Werthe von k sehr klein, wenn entweder $n = N$ oder $n = P$.

Die Gleichung (13e) lässt erkennen, dass zwischen der Oscillation der electricischen Momente und der der Ionen auch eine Phasendifferenz ist. Setzt man

$$a^2 - m n^2 = q_2 \cdot \cos \vartheta_2$$

$$k n = q_2 \cdot \sin \vartheta_2,$$

so ist

$$\frac{b}{B} = h = \frac{1}{q_2} \cdot e^{i\vartheta_2}.$$

Das Verhältniss der Amplituden wird ein Minimum, wenn

$$n^2 = \frac{1}{2}(P^2 + N^2).$$

Starke Schwingungen dieser Art würden möglicherweise die Ionen aus ihren Verbindungen reißen können, namentlich wenn noch eine electrostatische Ladung der Substanz hinzukommt, und bei allen Substanzen, wo starke Absorption an der Grenze des Ultraviolett vorkommt, würde die von Hrn. Hertz beobachtete Entweichung der Electricität unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlen eintreten können. Dass überwiegend leicht negative Electricität ausströmt, weist allerdings auf eine besondere Beschaffenheit der negativen Ionen hin.

Verhalten der nicht absorbirenden Medien.

Wenn der Absorptionscoefficient $k = 0$ ist, ist h reell, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$(17) \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{p} = \mathfrak{C}_0 \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}$$

wird alsdann rein reell. Der erste Factor dieses Werthes

$$(12) \quad \mathfrak{C}_0 = \frac{1}{A\sqrt{\epsilon\mu}}$$

ist bekanntlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im continuirlichen Aether, und für reelle Werthe ist

$$(13) \quad \frac{1+h}{1-h} = \frac{a^2\epsilon + 1 - mn^2}{a^2\epsilon - mn^2 - 1}.$$

Dieser Factor ist positiv und das Verhältniss $\mathfrak{C} : \mathfrak{C}_0 = 1 : n$ demnach reell, wenn entweder

$$mn^2 < a^2\epsilon - 1 \quad \text{oder} \quad mn^2 > a^2\epsilon + 1.$$

Der erste Fall ergibt constant werdendes Brechungsverhältniss für langsamere Schwingungen; die Geschwindigkeit ist in durchsichtigen nicht absorbirenden Medien kleiner, als im Vacuum. Der zweite Fall ergibt constant werdendes Brechungsverhältniss für sehr schnelle Schwingungen, und das Brechungsverhältniss kleiner als Eins. Der erste Fall entspricht also besser den Beobachtungen an den bekannteren sehr durchsichtigen Medien.

Wenn wir bemerken, dass $a^2/m = N^2$ das Quadrat der Schwingungszahl der vom Aether befreiten Ionen bezeichnet, so wird

$$\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\right)^2 = \frac{N^2 - n^2 - \frac{1}{m}}{N^2 - n^2 + \frac{1}{m}},$$

und da $\lambda = \mathfrak{C}/n$ ist, kann man setzen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C}_0^2) \left(N^2 - \frac{\mathfrak{C}^2}{\lambda^2} \right) + (\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}_0^2) \frac{1}{m} &= 0, \\ \mathfrak{C}^2 (N^2 \lambda^2 + \mathfrak{C}_0^2) - \mathfrak{C}^4 + \frac{\lambda^2 \mathfrak{C}_0^2}{m} - \mathfrak{C}_0^2 N^2 \lambda^2 + \mathfrak{C}^2 \frac{\lambda^2}{m} &= 0, \\ \mathfrak{C}^2 &= \frac{1}{2} \left(N^2 \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{m} + \mathfrak{C}_0^2 \right) \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(N^2 \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{m} + \mathfrak{C}_0^2 \right)^2 + \frac{\lambda^2 \mathfrak{C}_0^2}{m} - N^2 \lambda^2 \mathfrak{C}_0^2}. \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{C}^2 < \mathfrak{C}_0^2$ sein soll, kann nur das untere Zeichen gelten.
Dürfen wir

$$\lambda^2 \mathfrak{C}_0^2 \left[\frac{1}{m} - N^2 \right]$$

als klein ansehen, so lässt der letzte Ausdruck eine Entwicklung der Wurzel zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^2 &= \frac{\lambda_0^2 \mathfrak{C}^2 \left(N^2 - \frac{1}{m} \right)}{N^2 \lambda^2 + \mathfrak{C}_0^2 + \frac{\lambda^2}{m}} = \frac{\left(N^2 - \frac{1}{m} \right)}{\frac{N^2}{\mathfrak{C}_0^2} + \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\lambda^2} + \frac{1}{m \mathfrak{C}_0^2}} \\ \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}^2} &= \frac{N^2 + \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\lambda^2} + \frac{1}{m \mathfrak{C}_0^2}}{N^2 - \frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Formel, die sich der von Cauchy nähert, wenigstens für Medien mit kleiner Dispersion, in der \mathfrak{C}_0/λ als klein gegen N betrachtet werden kann. Denn dann kann man annähernd die Wurzel durch den binomischen Satz aus der letzten Gleichung ausziehen, und erhält

$$\begin{aligned} n &= \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2} \\ \alpha &= \frac{N + \frac{1}{m \mathfrak{C}_0^2}}{\sqrt{N^2 - \frac{1}{m}}}, \quad \beta = \frac{\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{C}_0^2}{N^2}}{\sqrt{N^2 - \frac{1}{m}}}. \end{aligned}$$

Polarisation durch Brechung.

Electricische Schwingungen in der Einfallsebene.

Für den einfallenden Strahl sei beim Einfallswinkel α die yz -Ebene die Einfallsebene, die Amplitude der magnetischen Schwingung C , dem z parallel; die der electricischen Schwingungen

liegt dann in der Einfallsebene, hat den Betrag nach Gleichung (13a) und (14b)

$$\frac{B}{C} = \frac{1}{\mathfrak{E} \cdot A \mu \cdot (1 + h)}$$

und der Winkel zwischen diesen Schwingungen und der y -Axe ist gleich dem Einfallswinkel α , und ihre in die Richtung der y fallende Componente ist also

$$\mathfrak{Y} = B \cos \alpha = \frac{C \cdot \cos \alpha}{\mathfrak{E} A \mu (1 + h)}.$$

Die Grenzbedingungen ergeben sich aus den Gleichungen (12a) und (12b) dadurch, dass an der Grenzfläche die dort nach x genommenen Differentialquotienten nicht unendlich werden dürfen, d. h. dass die Werthe, von denen sie genommen sind, ebenda nicht discontinuirlich sein dürfen. Es müssen also die Werthe von $(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y})/\varepsilon$, $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z})/\varepsilon$ und \mathfrak{N}/μ sowie \mathfrak{M}/μ auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich gross sein. Bezeichnen wir die Grössen, die sich auf das Mittel des einfallenden Strahles beziehen, mit dem Index 1, die des gebrochenen Strahles mit dem Index 3, so ist also an der Grenze zu setzen:

1. Für den einfallenden Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{y}_1}{\varepsilon_1} = \frac{(B_1 - b_1)}{\varepsilon_1} \cos \alpha$$

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mu_1} = \frac{C_1}{\mu_1}.$$

2. Für den gebrochenen Strahl:

$$\frac{\mathfrak{N}_3}{\mu_3} = \frac{C_3}{\mu_3}$$

$$\frac{\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{y}_3}{\varepsilon_3} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3} \cos \beta.$$

3. Für den gespiegelten Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{y}_2}{\varepsilon_1} = - \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} \cos \alpha$$

$$\frac{\mathfrak{N}_2}{\mu_1} = - \frac{C_2}{\mu_1}.$$

Nach Gleichung (13a) ist für die verschiedenen Indices

$$\frac{B - b}{C} = \frac{A \varepsilon}{p} = \mathfrak{E} \cdot A \cdot \varepsilon$$

oder

$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} = C_1 \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot A, \quad \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} = C_2 \cdot \mathfrak{C}_1 \cdot A, \quad \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3} = \mathfrak{C}_3 \cdot C_3 \cdot A.$$

Die Grenzbedingungen fordern also:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{C_1 + C_2}{\mu_1} = \frac{C_3}{\mu_3} \text{ und} \\ (C_1 - C_2) A \mathfrak{C}_1 \cos \alpha = C_3 A \cdot \mathfrak{C}_3 \cdot \cos \beta. \end{cases}$$

Da die Wellenphasen an der Grenzfläche $x = 0$, beiderseits mit gleicher Geschwindigkeit fortlaufen müssen, ist bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\sin \alpha} = \frac{\mathfrak{C}_3}{\sin \beta},$$

und die Gleichungen (I) ergeben

$$(Ia) \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} (C_1 + C_2) \cos \beta \cdot \sin \beta = (C_1 - C_2) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Da μ_3 und μ_1 bei den bekannten ungefärbt durchsichtigen Körpern kaum unterschieden sind, kann man ihr Verhältniss gleich 1 setzen, und erhält

$$C_1 (\sin 2\beta - \sin 2\alpha) = -C_2 (\sin 2\beta + \sin 2\alpha),$$

also $C_2 = 0$, wenn

$$\sin 2\beta = \sin 2\alpha,$$

was eintritt, wenn $\beta + \alpha = (\pi/2)$.

Es ist dies der Fall, wo der reflectirte Strahl auslöscht. Die Grösse des Polarisationswinkels entspricht Fresnel's bekanntem Gesetze, und zwar für alle Farben.

Magnetische Schwingungen in der Einfallsebene.

Wir bezeichnen wieder die Amplitude derselben in den drei Strahlen mit C_1 , C_2 , C_3 und die der electricen mit B_1 , B_2 , B_3 .

Die Grenzbedingung für die magnetischen Oscillationen wird

$$\frac{C_1 - C_2}{\mu_1} \cdot \cos \alpha = \frac{C_3}{\mu_3} \cos \beta$$

und für die electricen:

$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} + \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3}.$$

Indem wir diese Grössen wieder durch die entsprechenden C ausdrücken, erhalten wir

$$[C_1 + C_2] \mathfrak{C}_1 \cdot A = C_3 \mathfrak{C}_3 A,$$

oder wenn wir $\mu_1 = \mu_3$ setzen:

$$(II) \quad (C_1 - C_2) \cdot \cos \alpha \sin \beta = (C_1 + C_2) \sin \alpha \cdot \cos \beta,$$

$$(IIa) \quad C_1 \cdot \sin (\beta - \alpha) = C_2 \cdot \sin (\alpha + \beta),$$

was Fresnel's bekannter Werth für die Intensität des reflectirten Strahles in der anderen Polarisationsrichtung ist.

Sobald Absorption stattfindet, haben wir, wie bekannt, elliptische Polarisation. Ihre Gesetze sind aus der vorgetragenen Theorie ohne Lücke abzuleiten.

II. *Magnetisirung radial geschlitzter Eisenringe;* *von Heinrich Lehmann.*

(Hierzu Taf. IV.)

§ 1. *Einleitung.*

Ein in ein gleichförmiges magnetisches Feld gebrachter Eisenkörper erfährt nur dann eine gleichförmige Magnetisirung, wenn er durch eine Fläche zweiten Grades begrenzt ist. Ein verlängertes Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe in die Richtung der erzeugenden Kraftlinien fällt, artet bei unbegrenzt wachsender Rotationsaxe in einen unendlich langen, gleichförmig magnetisirten Cylinder aus. Denkt man sich diesen Cylinder mitsammt dem umgebenden Felde kreisförmig gekrümmt, so geht er über in einen durch ein gleichförmiges peripherisches Feld gleichförmig magnetisirten Ring, wobei die „peripherische Gleichförmigkeit“ so zu verstehen ist, dass man jedes Längenelement der Ringaxe als unendlich wenig gekrümmt betrachtet. Diese Gleichförmigkeit bleibt auch für endliche Dimensionen bestehen, solange die Querdimensionen des Ringes als verschwindend klein gegen seinen Radius betrachtet werden können.

Hierbei macht sich der Unterschied zwischen endlosen und nicht endlosen Gebilden in der Weise geltend, dass bei den letzteren eine selbstentmagnetisirende Kraft auftritt, infolge deren die magnetische Kraft im Innern des Körpers eine andere, kleinere wird, als ausserhalb. Diese selbstentmagnetisirende Kraft, welche als herrührend von den „Endflächen“ des magnetisirten Körpers zu denken ist, ist eine Function der Magnetisirung, und zwar ist sie ihr beim Ellipsoid proportional. Der Proportionalitätsfactor heisst, „Entmagnetisirungsfactor“ und lässt sich aus den Dimensionen des Ellipsoids berechnen.

Die Beobachtung ergibt die Werthe der Magnetisirung als Function der äusseren magnetischen Kraft. Will man daraus die Werthe der inneren („totalen“) magnetischen Kraft ermitteln, welche jene Magnetisirungen hervorgebracht haben,

so muss man von den Werthen der äusseren Kraft die mit dem Entmagnetisirungsfactor multiplicirten zugehörigen Magnetisirungen subtrahiren. Diese Operation ist graphisch in einfacher Weise auszuführen¹⁾, indem man durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine gerade Linie zieht, welche mit der Ordinatenaxe (der Axe der Magnetisirungen) einen Winkel bildet, dessen Tangente dem Entmagnetisirungsfactor gleich ist.²⁾ Man kann nun entweder die Aufgabe stellen, aus der Beobachtungcurve die „Normalcurve“ (Magnetisirung als Function der totalen magnetischen Kraft) abzuleiten oder umgekehrt aus der gegebenen Normalcurve die Beobachtungcurve für ein gegebenes Axenverhältniss zu construiren. In beiden Fällen wird die bezeichnete Gerade als neue Ordinatenaxe behandelt, auf welche die aus der gegebenen zu construierende Curve bezogen wird, nur mit dem Unterschiede, dass im ersteren Falle die Gerade nach Seite der negativen Werthe der magnetischen Kraft, im letzteren nach der positiven Seite zu ziehen ist. Dementsprechend kann man das Uebergangsverfahren im letzteren Falle als „Scheerung“, im ersteren als „Rückscheerung“ bezeichnen.

Bei dem geschlossenen Ring tritt, ebenso wie bei dem unendlichen Cylinder, eben in Folge der Endlosigkeit, keine selbstentmagnetisirende Kraft auf. Die Beobachtung liefert daher direct die Magnetisirung (resp. die Induction) als Function der totalen magnetischen Kraft.

Ist der Ring aber nicht vollständig geschlossen, sondern durch einen schmalen radialen Schlitz unterbrochen, so entsteht eine selbstentmagnetisirende Kraft, die mit wachsender Schlitzweite zunimmt. Es wird unsere Aufgabe sein, letztere in ihrer Abhängigkeit von der Magnetisirung und der geometrischen Gestaltung des Systems zu erforschen.

Was die theoretische Behandlung dieses Problems betrifft, so liegt eine Eigenthümlichkeit darin, dass die Inductionslinien fast ganz innerhalb des Eisens verlaufen. Davon aus-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 22. p. 175. 1886.

2) Unter der Annahme, dass für Ordinaten und Abscissen der gleiche Maassstab verwendet werde, was in Wirklichkeit aus praktischen Rücksichten in der Regel unzweckmässig wäre.

gehend hat Hr. du Bois¹⁾ eine Theorie des geschlitzten Ringes entwickelt.

Die von Hrn. du Bois aus dieser Theorie hergeleiteten Gleichungen finden, wie wir sehen werden, durch die Versuche innerhalb der Fehlergrenzen eine völlige Bestätigung.

§ 2. Methode.

Von den drei bei magnetischen Messungen üblichen Methoden, der ballistischen, der magnetometrischen und der optischen, konnte hier nur die erstere in Betracht kommen. Die Versuchsanordnung war im wesentlichen die von früheren Beobachtern²⁾ angewandte. Dieselbe werde an dem Schema

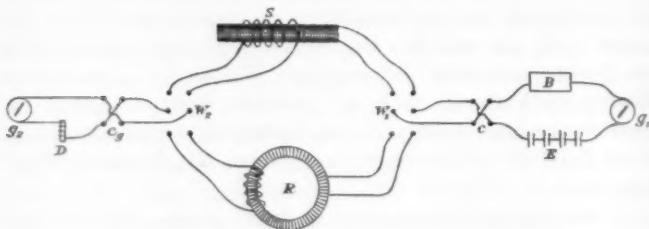


Fig. 1.

Fig. 1 erläutert. Die rechte Seite der Figur enthält die primäre, die linke Seite die secundäre Leitung und es bedeuten:

- R den Ring;
- S das Solenoid zur Aichung des Galvanometers g_2 ;
- g_2 Galvanometer im secundären Kreise;
- D eine Spirale zur Dämpfung der Galvanometerausschläge;
- g_1 das Galvanometer im primären Kreise;
- E die Batterie;
- B die Widerstände im primären Kreise;
- c den Commutator des Hauptstromes;
- c_g den Commutator des Galvanometers;

1) du Bois, Wied. Ann. 46. p. 486. § 15 ff. (vgl. auch du Bois, Verh. d. Phys. Ges. Berlin 27. Juni 1890 p. 81).

2) Rowland, Phil. Mag. 48. p. 321. 1874. Ewing: Magnetic induction in iron and other metals. London 1892; Uebers. Berlin 1892. Cap. III.

W_1 Wippe, welche gestattet, nach Belieben die primäre Leitung des Ringes oder des Solenoides einzuschalten;

W_2 Wippe, welche das Gleiche für die secundären Leitungen leistet.

Die Ausschläge des durch das Solenoid geachteten Galvanometers dienen zur Messung des magnetischen Zustandes des Eisenringes, welcher durch den seine primären Windungen durchfliessenden Hauptstrom magnetisirt wird. Die Formeln, mittels deren die charakteristischen Grössen aus den Angaben des Galvanometers in absoluten Einheiten brechnet werden, werden unten (§ 5) abgeleitet.

§ 3. Apparate.

Das *Galvanometer* war ein Wiedemann-Edelmann'sches. Um dasselbe als ballistisches zu verwenden, war seine volle Schwingungsdauer durch Vergrösserung des Trägheitsmomentes und durch Astasirung auf 12 Sec. gebracht.

Die Aichung des Galvanometers geschah mit Hülfe des *Solenoids* *S*. Dasselbe bestand aus einem cylindrischen Holzkern, welcher mit einer Lage von 298 Windungen 1,5 mm dicken, mit Seide doppelt umspunnenen Kupferdrahtes bewickelt war. Seine Dimensionen waren folgende:



Fig. 2.

$$2r_1 = 33,85 \text{ mm}, \quad 2r_2 = 37,2 \text{ mm},$$

$$2\rho = 35,52 \text{ mm} = 2 \frac{r_1 + r_2}{2},$$

$$N = 298; \quad l = 48,7 \text{ cm}; \quad \frac{N}{l} = 6,12 \text{ cm}^{-1},$$

$$A = \rho^2 \pi = 990,9 \text{ mm}^2 = 9,909 \text{ cm}^2;$$

$$u = 2\pi\rho = 11,16 \text{ cm},$$

$$F = NA = 2953 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{F}{l} = \frac{NA}{l} = 60,64 \text{ cm}^2,$$

$$L = N \cdot u = 33,3 \text{ m}.$$

Hierin bedeuten N Windungszahl, l Länge der Spule, A Querschnitt, ρ den Radius (die Drahtaxe als Umfang genommen vgl. Fig. 2), u Länge einer Windung, F Windungsfläche einer Windung, L gesammte Drahtlänge. Diese Mes-

sungen wurden mit Caliberraass (Schubleere) und Theilmaschine ausgeführt.

Auf dieses Solenoid wurde eine zweite Spule von etwas grösserem Durchmesser geschoben; diese bestand aus einer in der Längsrichtung (zur Vermeidung Foucault'scher Ströme) geschlitzten Messinghülse, welche mit vier Lagen 0,3, mm dicken mit Seide doppelt umspunnenen Kupferdrahts in einer Länge von 57 mm bewickelt war. Die Windungszahl betrug $n = 632$, der Widerstand des Drahtes 203 Ohm, während der der primären Rolle 0,33 Ohm war.

Die vier Spiralen des Galvanometers, welche zu je zwei auf die beiden Rollen vertheilt waren, wurden parallel geschaltet und ergaben einen Widerstand von 15 Ohm.

Zur *Strommessung* wurde theils ein „platform ampère-meter“ von Lord Kelvin, theils ein Siemens'sches Torsionsgalvanometer benutzt, deren Aichungen voltametrisch controllirt wurden.

Als *Stromquelle* wurden Accumulatoren benutzt.

Zu erwähnen ist noch ein *Flüssigkeitsrheostat* zur Entmagnetisirung des Eisenringes mittels stetig abnehmender Stromwechsel.¹⁾ Seine Dimensionen waren: 35 cm Höhe und 11 cm Durchmesser. Mit einer Lösung von Zinksulfat in einer Concentration von etwa 40 Proc. hatte derselbe einen Widerstand von ca. 10 Ohm.

§ 4. Der Eisenring.

Ein quadratisches Stück bester schwedischer Eisenplatte (Marke: P. S. B. A.) wurde sorgfältig 48 Stunden lang ausgeglüht und aus diesem ein ringförmiges Stück ausgeschnitten und roh abgedreht, und, nachdem dieses noch einmal ausgeglüht war, der Ring in seiner endgültigen Form vollkommen kreisförmig und mit kreisförmigem Querschnitt mittels einer dazu hergestellten Leere abgedreht.

Seine Dimensionen wurden theils durch Ausmessung mit Caliberraass, Contactschraube und Theilmaschine, theils durch Wägung gemessen.

1) Welcher im wesentlichen nach Ewing l. c. ausgeführt war. Die Angabe wurde vor Erscheinen des Buches einem Artikel desselben Autors im „Electrician“ entnommen.

Die Längenmessungen ergaben folgende Dimensionen:

$$r = 70,65 \text{ mm}, R = 88,55 \text{ mm},$$

$$\varrho = \frac{R+r}{2} = 79,6 \text{ mm} = 7,96 \text{ cm};$$

$$2\pi\varrho = 500,1 \text{ mm} = 50,01 \text{ cm},$$

$$a = 8,95 \text{ mm},$$

$$\text{woraus } S = a^2\pi = 251,6 \text{ mm}^2 = 2,516 \text{ cm}^2$$

$$\text{und } V = 125,86 \text{ cm}^3.$$

Die Bedeutung der Bezeichnungen ergibt sich aus den Fig. 3 und 4. Fig. 3 stellt einen axialen, Fig. 4 einen äquatorialen Schnitt dar. Letzterer enthält den Kreis, auf welchem die Mittelpunkte der Querschnitte liegen (Centralkreis).

Hiernach bedeuten:

R den Radius des äusseren Kreises des Äquatorialschnittes,

r den Radius des inneren Kreises des Äquatorialschnittes,

$\varrho = \frac{R+r}{2}$ den Radius des Centralkreises,

a den Radius des kreisförmigen Querschnittes;

ferner $V = 2\varrho\pi \cdot a^2\pi$ das Volumen des Ringes

und $S = a^2\pi$ den Querschnitt des Ringes.

Eine zweite Bestimmung des Querschnittes wurde nach dem Vorgange von Rowland¹⁾ durch Wägung, also auf einem von diesem völlig unabhängigen Wege gemacht. Aus dem Gewichtsverlust des in Wasser getauchten Ringes ergab sich (unter Berücksichtigung der Correction für die Temperatur)

$$\text{woraus } V_2 = 126,21 \text{ cm}^3,$$

$$S_2 = \frac{V}{2\pi\varrho} = 252,3 \text{ mm}^2 = 2,523 \text{ cm}^2.$$

Gleichzeitig ergab sich das spezifische Gewicht zu 7,82. Die beiden Werthe von V und S weichen nur um 0,3 Proc. von einander ab. Die Mittelwerthe aus beiden Bestimmungen sind:

$$V = 126,03 \text{ cm}^3; S = 2,519 \text{ cm}^2.$$

Nach der stattgehabten genauen Ausmessung der Dimensionen

1) Rowland, Phil. Mag. 48. p. 321. 1874.

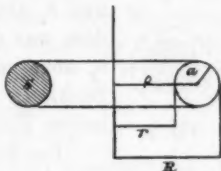


Fig. 3.



Fig. 4.

wurde der Ring¹⁾ bewickelt in der unten zu berichtenden Weise. Um den für das spätere Ausfräsen des Schlitzes erforderlichen Raum freizuhalten, wurden an einer Stelle in einem mittleren Abstand von 8 mm zwei den Ringquerschnitt umschliessende Messingbacken von etwa 4 mm Dicke und 15 mm äusseren Radius aufgelöthet. Die Fig. 5 zeigt die Art der Auflöthung im Querschnitt, wobei ll die Löthstellen der beiden Halbringe einer Backe, Fig. 6 die Anordnung im Aequatorialschnitt, wobei der Abstand der beiden Backen b_1 und b_2 absichtlich zu gross gezeichnet ist. Ausserdem war diametral zu der Mitte des durch b_1 und b_2 abgesperrten Ringstückes eine dritte ebensolche Backe b_3 angebracht, welche es ermöglichte, die beiden Ringhälften getrennt zu bewickeln.



Fig. 5.

Der Ring erhielt drei primäre Windungslagen von 1,5 mm dickem doppelseitigbesponnenem Kupferdraht. Nach Vollendung einer Windungslage wurde auf dieselbe eine Mischung von Wachs und Kolophonium (etwa halb und halb)



Fig. 6.

aufgetragen und mittels eines flachen heissen Eisenstücks so vertheilt, dass sich nach erfolgter Erkaltung der nächstfolgenden Windung wieder eine vollkommen glatte Ringfläche darbot. Hierdurch wurde das Einsinken der Windungen in die darunter befindliche Lage verhütet und eine möglichst grosse Constanz des Querschnittes jeder Lage gewährleistet. In dieser Weise wurden drei primäre Lagen übereinander gewickelt und über die dritte und oberste Lage ebenso eine secundäre Windungslage von $\frac{1}{2}$ mm dickem doppelt besponnenem Kupferdraht.

Die nachstehende Tabelle enthält die Windungszahlen (N), Radien (a) und Querschnitte (S) der drei primären Lagen, welche durch die Indices 1, 2, 3 der Reihe nach (von innen nach aussen) unterschieden sind:

$N_1 = 241$	$N_2 = 227$	$N_3 = 227$
$a_1 = 9,9 \text{ mm}$	$a_2 = 11,6 \text{ mm}$	$a_3 = 13,2 \text{ mm}$
$S_1 = a_1^2 \pi = 307,9 \text{ mm}^2$	$S_2 = a_2^2 \pi = 422,7 \text{ mm}^2$	$S_3 = a_3^2 \pi = 547,4 \text{ mm}^2$

1) Von mir unter Beihülfe des Hrn. O. Wolff, in dessen mechanischer Werkstatt der Ring hergestellt war.

$N_r = N_1 + N_2 + N_3 = 695$; $N = 613$, wo N die Windungszahl der secundären Lage. Der zwischen b_1 und b_2 für das Anbringen des Schlitzes freigelassene Raum liess Platz für weitere drei Lagen von je drei Windungen; diese sind in den vorstehenden Zahlen N_1 , N_2 , N_3 mit einbegriffen, sodass $N_r = 695$ die gesammte Windungszahl der primären Wickelung bedeutet.

Die beiden Ringhälften waren mit je einem zusammenhängenden Stück primären Drahtes bewickelt, welche bei allen Versuchen hintereinandergeschaltet waren; dasselbe gilt von den beiden Hälften der secundären Spirale. Der Widerstand der primären Windung betrug in dieser Schaltung 0,51 Ohm, derjenige der secundären $R = 4,97$ Ohm.

§ 5. Messungsverfahren.

a) Aichung des Galvanometers.

Wie oben (§ 3) erwähnt, wurde zur Auswerthung der Galvanometerausschläge in absolutem Maasse ein gerades Solenoid angewandt, dessen Dimensionen und Constanten l. c. angegeben sind. Die Anwendung des Solenoids hat vor der des Ernductors den Vorzug, dass man von der erdmagnetischen Intensität, also auch von ihren Variationen unabhängig ist; sie beruht auf der absoluten Messung einer Stromstärke.

Bezeichnen wir mit C den (in absoluten electromagnetischen Einheiten gemessenen) Strom, mit H das durch denselben im Innern des Solenoids erzeugte magnetische Feld, mit Q , das Zeitintegral der electromotorischen Kraft, welche in einer den Querschnitt der Rolle umschliessenden Windung durch das plötzliche Entstehen oder Verschwinden des Stromes C hervorgebracht wird oder, in der Sprache Faraday's, die Zahl der Kraftlinien, welche jene Windung durchsetzen, so erhalten wir unter Anwendung der in § 3 erläuterten Bezeichnungen und unter Voraussetzung eines gleichförmigen Feldes¹⁾ im Innern der Rolle

1) Die genannte Voraussetzung ist natürlich nur bei einem unendlich langen Solenoid streng erfüllt, lässt sich aber mit beliebiger Annäherung durch passende Wahl des Verhältnisses zwischen Länge und Querschnitt befriedigen. Der strenge Werth von H für einen Punkt auf der Mitte der Axe eines Solenoids von der Länge l und dem Radius r (Wiedemann, Electr. 3. p. 208. 3. Aufl.) ist:

$$H = \frac{4\pi CN}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}.$$

$$H = \frac{4\pi CN}{l}$$

$$Q_s = H \cdot A = \frac{4\pi CNA}{l} = \frac{4\pi C \cdot F}{l}.$$

Wir erhalten also:

$$Q_s = 4\pi C \cdot 60,64 = 762 C,$$

oder, wenn wir die Stromstärke, statt in absoluten Einheiten, in Zehnteln, d. i. in Amp., messen:

$$Q_s = 76,2 i,$$

wo i die in Amp. gemessene Stromstärke bedeutet.

Ist n die Zahl der secundären Windungen, r der Widerstand der secundären Leitung einschliesslich des Galvanometers, so ist die in das Galvanometer bei Oeffnen und Schliessen des Stromes geschickte Strommenge:

$$Q_s \cdot \frac{n}{r}.$$

Sind nun die Ausschläge des Galvanometers, wie es die Theorie des ballistischen Galvanometers für kleine Ausschlagswinkel fordert, proportional der in einer gegen die Schwingungsdauer der Nadel sehr kurzen Zeit hineingeschickten Strommenge, so können wir setzen:

$$Q_s \frac{n}{r} = b \cdot d_s,$$

wo d_s der auf Bogen reducirte Scalenausschlag, welcher durch das Oeffnen oder Schliessen des Stromes im Solenoid hervorgerufen ist, b ein Proportionalitätsfactor, den wir als den „ballistischen“ Reductionsfactor des Galvanometers bezeichnen

Nun hatte in unserem Solenoid $\sqrt{r^2 + (l/2)^2}$ den Werth 487,3, wick also nicht um 0,1 Proc. von $l = 487,0$ mm ab. Der Forderung der Endlosigkeit war also mit hinreichender Annäherung Genüge gethan. Da die Länge der secundären Rolle, welche die Mitte des Solenoids umschloss, 57 mm (gegen 487 mm der Länge der Rolle, also nur etwas über $\frac{1}{8}$) betrug, so waren die sämmtlichen secundären Windungen genügend von den Endflächen des Solenoids entfernt, um einen merklichen Einfluss derselben auszuschliessen. Uebrigens ergaben Controllversuche, dass kleine Verschiebungen der secundären Rolle nach den Enden zu keinen merklichen Einfluss auf den Ausschlag des Galvanometers hatten, wodurch eine experimentelle Bestätigung für die Gleichförmigkeit des Feldes im mittleren Theile des Solenoids geliefert wurde.

könnten und welcher die durch einen Ausschlag von einem Scalenthail (nach vorgenommener Reduction auf Bogen) gemessene Strommenge angibt.

Wird anstatt Oeffnens oder Schliessens der Strom commutirt, so wird der Ausschlag doppelt so gross, und statt Q_s ist $2 Q_s$ zu setzen, sodass bei Commutirung:

$$2 Q_s \cdot \frac{n}{r} = b \cdot d_s,$$

daraus:

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{d_s} Q_s \cdot \frac{n}{r} = \frac{1}{d_s} \cdot \frac{n}{r} \cdot 76,2 i,$$

und da $n = 632$, $r = 36,44 \text{ Ohm} = 36,44 \cdot 10^9 [\text{cm sec}^{-1}]$

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{d_s} \cdot \frac{632 \cdot 76,2}{36,44} i \cdot 10^{-9} = 1321 \frac{i}{d_s} \cdot 10^{-9}.$$

Es ergab sich im Verlaufe der Untersuchung, d. h. während mehr als der Dauer eines Jahres, stets:

$$b = 66,0 \cdot 10^{-9} \pm 1 \text{ Proc.},$$

ein Beweis für die Constanz des Galvanometers.

b) Berechnung der magnetischen Kraft (§) und der Magnetisirung (3).¹⁾

Wir wollen kurz die anzuwendenden Formeln auf Grund der von Kirchhoff²⁾ gegebenen Theorie des gleichförmig magnetisirten Eisenringes ableiten.

Wir nehmen zunächst ein einziges Ringsolenoid an; für dieses als ein endloses Solenoid ist die magnetische Kraft:

$$\S = \frac{4 \pi C N}{l};$$

N/l , die Windungszahl pro Längeneinheit, und demzufolge \S variirt von innen nach aussen (in Cylinderflächen, die coaxial der Rotationsaxe des Ringes sind), weil $l = 2 \pi r$ und r von r_1 bis r_2 variirt. Dadurch würde sich streng genommen für ein variables r ergeben:

$$\S = \frac{4 \pi C N}{2 \pi r} = \frac{2 C N}{r},$$

1) Eine übersichtliche Darstellung der verschiedenen Methoden zur Untersuchung magnetischer Körper findet man bei Ewing, Magn. ind. etc. Cap. II u. III.

2) Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 223.

und die Zahl der Kraftlinien, welche den ganzen Querschnitt des Ringes erfüllen (das Flächenintegral der magnetischen Kraft über den Querschnitt), wäre

$$= \int \mathfrak{H} dS = 2 CN \int \frac{dS}{r} = 4 CN \pi (\varrho - \sqrt{\varrho^2 - a^2})^1,$$

wo a der Radius des Querschnittes und ϱ der Abstand des

1) Drücken wir das Flächenelement dS durch Polarcoordinaten r' und ϑ aus (vgl. Fig. 7), so wird:

$$\int \frac{dS}{r} = 2 \int_0^\pi \int_0^a \frac{r' \cdot dr' \cdot d\vartheta}{\varrho + r' \cos \vartheta} = 2 \int_0^\pi r' dr' \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\varrho + r' \cos \vartheta};$$

setzt man:

$$z = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},$$

so wird:

$$\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\varrho + r' \cos \vartheta} = \int_0^\infty \frac{2 dz}{(1+z^2) \left[\varrho + r' \frac{1-z^2}{1+z^2} \right]},$$

und nach einigen Umformungen:

$$= \frac{1}{\varrho + r'} \int_0^\infty \frac{2 dz}{1 + \frac{\varrho - r'}{\varrho + r'} z^2},$$

setzt man wiederum:

$$u = z \sqrt{\frac{\varrho - r'}{\varrho + r'}},$$

so wird dies:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varrho + r'} \int_0^\infty \frac{2 du}{\sqrt{\frac{\varrho - r'}{\varrho + r'}} (1 + u^2)} = \frac{2}{\sqrt{\varrho + r'} \sqrt{\varrho - r'}} \left[\operatorname{arctg} u \right]_0^\infty \\ &= \frac{2}{\sqrt{\varrho^2 - r'^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2 - r'^2}}. \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\int \frac{dS}{r} = 2 \pi \int_0^a \frac{r' \cdot dr'}{\sqrt{\varrho^2 - r'^2}} = -2 \pi \left[\sqrt{\varrho^2 - r'^2} \right]_0^a = 2 \pi [\varrho - \sqrt{\varrho^2 - a^2}]$$

wie oben angegeben; dieser Beweis ist bei Kirchhoff l. c. nicht geführt.

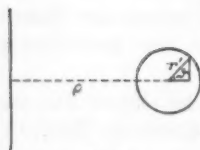


Fig. 7.

Querschnittcentrums von der Axe des Ringes. Dieser Ausdruck, durch den Querschnitt $a^2 \pi$ dividirt, würde die mittlere Feldintensität ergeben. Entwickeln wir die Wurzel in einer binomischen Reihe, so folgt:

$$\sqrt{\rho^2 - a^2} = \rho \sqrt{1 - \left(\frac{a}{\rho}\right)^2} = \rho \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{\rho}\right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{\rho}\right)^6 \dots \right],$$

sodass

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{H} dS &= 4 \pi C N \rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{\rho}\right)^4 \dots \right] \\ &= 2 \pi C N \rho \left[\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\rho}\right)^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

Nun war in unserem Falle der mittlere Werth von

$$\frac{a}{\rho} = \frac{11,6}{79,6} = \text{ca. } \frac{1}{7};$$

also angenähert $(a/\rho)^2 = \frac{1}{50}$ und $\frac{1}{4}(a/\rho)^4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50}$, d. h. das zweite Glied $\frac{1}{4}(a/\rho)^4$ ist nur $\frac{1}{2500}$ des ersten $(a/\rho)^2$. Wir machen also nur einen Fehler von ca. $\frac{1}{2}$ Proc., wenn wir das zweite Glied (und wegen der raschen Convergenz alle weiteren Glieder) fortlassen, sodass übrig bleibt:

$$\int \mathfrak{H} dS = 2 \pi C N \rho \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 = 2 \pi C N \frac{a^2}{\rho},$$

und als Mittelwerth der Feldintensität:

$$\frac{\int \mathfrak{H} \cdot dS}{a^2 \pi} = \frac{2 C N}{\rho}.$$

Dies ist aber der Werth von \mathfrak{H} im Mittelpunkte des Querschnittes, weil hier $r = \rho$.

Wir können also unbedenklich, indem wir diesen Werth an Stelle des Mittelwerthes von \mathfrak{H} setzen, die Aenderung der magnetischen Kraft mit dem Radius vernachlässigen. Wenden wir dieses Ergebniss auf alle drei den Ring umschliessenden Solenoide an, so erhalten wir als resultirende magnetische Kraft die Summe der drei von jenen herrührenden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_3 = \frac{2 C N_1}{\rho} + \frac{2 C N_2}{\rho} + \frac{2 C N_3}{\rho} \\ &= \frac{2 C}{\rho} (N_1 + N_2 + N_3) = \frac{2 C}{7,96} \cdot 695 = 174,6 C, \end{aligned}$$

oder, wenn wir den Strom, statt in absoluten Einheiten, in Amp. messen und die Zahl der Amp. mit i bezeichnen:

$$(1) \quad \mathfrak{H} = 17,46 i.$$

Ist der von dem Ringsolenoid umschlossene Raum ganz mit Eisen erfüllt, so wird dasselbe überall in Richtung der magnetischen Kraft, d. i. ist senkrecht zum axialen Querschnitt und gleichförmig innerhalb desselben magnetisirt. Wird nun der die primären Solenoidwindungen durchfliessende Strom plötzlich geöffnet oder geschlossen (oder auch verstärkt oder geschwächt), so wird in einer den ganzen Querschnitt umschliessenden secundären Windung eine electromotorische Kraft inducirt, deren Zeitintegral durch den Ausschlag eines in die secundäre Leitung eingeschlossenen Galvanometers gemessen werden kann. Dieses Zeitintegral ist gleich der Aenderung des Flächenintegrals der magnetischen Induction \mathfrak{B} über den von der secundären Windung umschlossenen Querschnitt.

Bezeichnen wir, wie oben, mit N die Windungszahl der secundären Ringwicklung, ferner mit R den Widerstand der secundären Leitung (einschliesslich Galvanometer, Dämpfungsspirale und eventuell eingeschaltete Widerstände), mit Q_r die gesammte durch die Stromänderung (resp. Oeffnen, Schliessen oder Commutiren) in den secundären Windungen erzeugte electromotorische Kraft, so geht durch das Galvanometer die Strommenge:

$$\frac{Q_r \cdot N}{R}$$

Macht das Galvanometer infolge dieses Stromstosses einen Ausschlag von α Scalentheilen (auf Bogen reducirt), so haben wir mit Benutzung des durch die Aichung ermittelten „ballistischen“ Reductionsfactors für das Stromintegral den anderen Ausdruck:

$$b \cdot \alpha.$$

Es folgt:

$$Q_r \cdot \frac{N}{R} = b \cdot \alpha$$

$$Q_r = \frac{R}{N} \cdot b \cdot \alpha.$$

Angenommen nun, die secundären Windungen umschlössen unmittelbar den ringförmigen Eisenkern, so hätten wir, da wir nach dem Obigen die Magnetisirung als gleichförmig ansehen dürfen:

$$Q_r = \Delta \mathfrak{B} \cdot S^1)$$

$$\Delta \mathfrak{B} = \frac{Q_r}{S} = \frac{\frac{R}{iN} \cdot b \alpha}{S},$$

wo S den Querschnitt des Eisenringes und $\Delta \mathfrak{B}$ die Aenderung der magnetischen Induction bedeuten.

Umschliessen dagegen die secundären Windungen nicht unmittelbar den Eisenkern, sondern gleichzeitig mit diesem die primäre Wicklung, so trägt auch die Variation der ausserhalb des Eisens verlaufenden Kraftlinien, welche von jener herrühren, zu dem vom Galvanometer gemessenen Stromimpuls bei. Wir müssten daher diesen Theil, wenn wir die magnetische Induction im Eisen messen wollten, durch eine Correction ausschliessen. Wir ziehen es jedoch vor²⁾, anstatt der magnetischen Induction, die *Magnetisirung* zu bestimmen, d. i. das magnetische Moment pro Volumeneinheit, welche mit der Induction durch die bekannte Gleichung verbunden ist:

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi}.$$

Um diese zu finden, müssen wir nicht nur die ausserhalb des Eisens, sondern überhaupt alle vom magnetisirenden Strome herrührenden Kraftlinien von der gesammten durch das Galvanometer angezeigten Kraftlinienzahl in Abrechnung bringen, d. i. diejenige electromotorische Kraft, welche in einer die primäre Wicklung umschliessenden Windung durch Schliessen oder Oeffnen des Stromes entstehen würde, wenn der Innenraum völlig eisenfrei wäre; diese ist aber, unter der oben motivirten Näherungsannahme, dass das Feld jeder Windungslage gleichförmig ist, offenbar:

$$\mathfrak{S}_1 S_1 + \mathfrak{S}_2 S_2 + \mathfrak{S}_3 S_3 = \frac{2C}{\varrho} (N_1 S_1 + N_2 S_2 + N_3 S_3) \\ = \frac{2C}{7,96} (742 + 960 + 1242) = \frac{2C \cdot 2944}{7,96} = 739,7 C,$$

$$1) \quad Q_r = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{B} \cdot dS = \mathfrak{B} \cdot S = \Delta \mathfrak{B} \cdot S.$$

2) Vgl. du Bois, Phil. Mag. (5) 29. p. 303. 1890 am Schluss (§§ 16 und 17) und Verhandl. der physikal. Ges. Berlin vom 27. Juni 1890.

der, wenn wir statt in ooslabuten Einheiten den Strom in Zehnteln (in Amp.) messen:

$$= 73,97 i.$$

Berücksichtigen wir gleichzeitig, dass, wie wir oben hergeleitet haben,

$$(1) \quad \mathfrak{S} = 17,46 i$$

$$i = \frac{\mathfrak{S}}{17,46},$$

so folgt:

$$73,97 i = \frac{73,97}{17,46} \mathfrak{S} = 4,24 \mathfrak{S}.$$

Der nach diesem Abzug verbleibende Rest ist dann:

$$\mathfrak{S} S - \mathfrak{S} S = 4 \pi \mathfrak{S} \cdot S = Q_r - (\mathfrak{S}_1 S_1 + \mathfrak{S}_2 S_2 + \mathfrak{S}_3 S_3),$$

woraus:

$$(2) \quad \mathfrak{S} = \frac{Q_r - (\mathfrak{S}_1 S_1 + \mathfrak{S}_2 S_2 + \mathfrak{S}_3 S_3)}{4 \pi S} = \frac{\frac{R}{N} b \cdot a - 4,24 \mathfrak{S}}{31,65}.$$

Zu dieser Formel (2) ist zu bemerken, dass ihr die (im allgemeinen unrichtige) Voraussetzung zu Grunde liegt, dass durch Stromöffnung alle Inductionslinien verschwinden, oder durch Stromschluss erst alle der Magnetisirung entsprechenden Inductionslinien auftreten, d. h. dass keine remanente Magnetisirung im Eisen zurückbleibt oder vorhanden war. Dieser Einwand fällt weg, erstens, wenn wir ähnlich wie oben schreiben:

$$(2a) \quad \Delta \mathfrak{S} = \frac{\frac{R}{N} b \cdot a - 4,24 \Delta \mathfrak{S}}{31,65},$$

wo $\Delta \mathfrak{S}$ und $\Delta \mathfrak{S}$ die einer Stromänderung Δi entsprechenden Änderungen der Magnetisirung und der Feldintensität bedeuten. Diese Formel wäre also anzuwenden bei schrittweiser Magnetisirung durch Schwächung oder Verstärkung des Stromes.

Zweitens lässt sich der Einfluss des remanenten Magnetismus fast völlig eliminieren durch Anwendung der Commutirung des Stromes. Es ergibt sich dann einfach durch Halbirung des Ausschlags:

$$(2b) \quad \mathfrak{S} = \frac{\frac{R}{N} \frac{b}{2} a - 4,24 \mathfrak{S}}{31,65} \quad 1)$$

1) Der Antheil der vom Strome herrührenden Kraftlinien an dem Ausschlage ist wegen der Commutirung natürlich $2 \cdot 4,24 \mathfrak{S}$, wird aber durch die Halbirung der gesammten Kraftlinienzahl wieder zu $4,24 \mathfrak{S}$, weshalb die Correction ungeändert bleibt.

Eine auf diese Weise erhaltene Magnetisirungscurve (aufsteigende Commutirungscurve) wird zwischen den beiden Aesten der Hysteresisschleife verlaufen. Sie kann statt jener zum Studium des magnetischen Verhaltens benutzt werden für alle Fragen, bei denen es auf die Kenntniss der Retentionsfähigkeit und der Coercitivkraft, allgemein gesagt der Hysteresis, nicht ankommt.

c. Die Beobachtung.

Da infolge der Hysteresis das magnetische Verhalten des Eisens von seiner „magnetischen Vorgeschichte“ abhängt, so war es von Wichtigkeit, bei Beginn jeder Messungsreihe von einem wohldefinierten, eindeutig bestimmten, magnetischen Zustande des Ringes auszugehen. Hierzu wurde ein von bedeutender Stärke (welche durch die grösste vorher angewandte Stärke bestimmt war) unter fortwährendem Commutiren allmählich bis auf Null absinkender Strom durch die primären Windungen des Ringes geschickt, zu dessen Schwächung der oben (§ 3) erwähnte Flüssigkeitsrheostat benutzt wurde, indem die dem Ring parallel geschaltete Flüssigkeitssäule (vgl. Fig. 8) fortdauernd bis zu annäherndem Verschwinden verkleinert wurde. Durch stufenweise Verkleinerung des angewandten Hauptstromes konnte diese Schwächung beliebig weit getrieben werden; der Eisenkern war somit in einem genau definierten unmagnetischen Zustande.

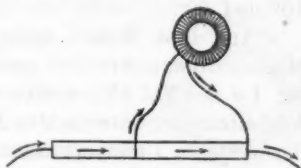


Fig. 8.

Bei der darauf folgenden Messung wurde stufenweise von schwächeren zu stärkeren Feldern übergegangen und eine Wiederholung der Reihe (oder etwa erwünschte Einschaltung eines Curvenpunktes) nie ohne vorherige Entmagnetisirung vorgenommen. Zur Herstellung einer Curve wurde eine erhebliche Anzahl Punkte (bei der ersten für den geschlossenen Ring: 25) bestimmt, deren jeder durch das Mittel aus zehn Beobachtungen gewonnen war. Nach dem fünften Ausschlage wurde der Commutator c_g , welcher die Stromrichtung im Galvanometer zu wechseln gestattete, umgelegt, um den Ein-

der, wenn wir statt in ooslabuten Einheiten den Strom in Zehnteln (in Amp.) messen:

$$= 73,97 i.$$

Berücksichtigen wir gleichzeitig, dass, wie wir oben hergeleitet haben,

$$(1) \quad \Phi = 17,46 i$$

$$i = \frac{\Phi}{17,46},$$

so folgt:

$$73,97 i = \frac{73,97}{17,46} \Phi = 4,24 \Phi.$$

Der nach diesem Abzug verbleibende Rest ist dann:

$$\mathfrak{S} S - \Phi S = 4 \pi \mathfrak{S} \cdot S = Q_r - (\Phi_1 S_1 + \Phi_2 S_2 + \Phi_3 S_3),$$

woraus:

$$(2) \quad \mathfrak{S} = \frac{Q_r - (\Phi_1 S_1 + \Phi_2 S_2 + \Phi_3 S_3)}{4 \pi S} = \frac{\frac{R}{N} b \cdot a - 4,24 \Phi}{31,65}.$$

Zu dieser Formel (2) ist zu bemerken, dass ihr die (im allgemeinen unrichtige) Voraussetzung zu Grunde liegt, dass durch Stromöffnung alle Inductionslinien verschwinden, oder durch Stromschluss erst alle der Magnetisirung entsprechenden Inductionslinien auftreten, d. h. dass keine remanente Magnetisirung im Eisen zurückbleibt oder vorhanden war. Dieser Einwand fällt weg, erstens, wenn wir ähnlich wie oben schreiben:

$$(2a) \quad \Delta \mathfrak{S} = \frac{\frac{R}{N} b \cdot a - 4,24 \Delta \Phi}{31,65},$$

wo $\Delta \mathfrak{S}$ und $\Delta \Phi$ die einer Stromänderung Δi entsprechenden Aenderungen der Magnetisirung und der Feldintensität bedeuten. Diese Formel wäre also anzuwenden bei schrittweiser Magnetisirung durch Schwächung oder Verstärkung des Stromes.

Zweitens lässt sich der Einfluss des remanenten Magnetismus fast völlig eliminiren durch Anwendung der Commutirung des Stromes. Es ergibt sich dann einfach durch Halbierung des Ausschlags:

$$(2b) \quad \mathfrak{S} = \frac{\frac{R}{N} \frac{b}{2} a - 4,24 \Phi}{31,65} \cdot 1)$$

1) Der Antheil der vom Strome herrührenden Kraftlinien an dem Ausschlage ist wegen der Commutirung natürlich $2 \cdot 4,24 \Phi$, wird aber durch die Halbierung der gesammten Kraftlinienzahl wieder zu $4,24 \Phi$, weshalb die Correction ungeändert bleibt.

Eine auf diese Weise erhaltene Magnetisierungscurve (aufsteigende Commutierungscurve) wird zwischen den beiden Aesten der Hysteresisschleife verlaufen. Sie kann statt jener zum Studium des magnetischen Verhaltens benutzt werden für alle Fragen, bei denen es auf die Kenntniss der Retentionsfähigkeit und der Coercitivkraft, allgemein gesagt der Hysteresis, nicht ankommt.

c. Die Beobachtung.

Da infolge der Hysteresis das magnetische Verhalten des Eisens von seiner „magnetischen Vorgeschichte“ abhängt, so war es von Wichtigkeit, bei Beginn jeder Messungsreihe von einem wohldefinierten, eindeutig bestimmten, magnetischen Zustande des Ringes auszugehen. Hierzu wurde ein von bedeutender Stärke (welche durch die grösste vorher angewandte Stärke bestimmt war) unter fortwährendem Commutiren allmählich bis auf Null absinkender Strom durch die primären Windungen des Ringes geschickt, zu dessen Schwächung der oben (§ 3) erwähnte Flüssigkeitsrheostat benutzt wurde, indem die dem Ring parallel geschaltete Flüssigkeitssäule (vgl. Fig. 8) fortdauernd bis zu annäherndem Verschwinden verkleinert wurde. Durch stufenweise Verkleinerung des angewandten Hauptstromes konnte diese Schwächung beliebig weit getrieben werden; der Eisenkern war somit in einem genau definierten unmagnetischen Zustande.

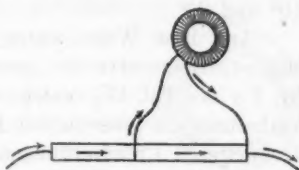


Fig. 8.

Bei der darauf folgenden Messung wurde stufenweise von schwächeren zu stärkeren Feldern übergegangen und eine Wiederholung der Reihe (oder etwa erwünschte Einschaltung eines Curvenpunktes) nie ohne vorherige Entmagnetisierung vorgenommen. Zur Herstellung einer Curve wurde eine erhebliche Anzahl Punkte (bei der ersten für den geschlossenen Ring: 25) bestimmt, deren jeder durch das Mittel aus zehn Beobachtungen gewonnen war. Nach dem fünften Ausschlage wurde der Commutator c_g , welcher die Stromrichtung im Galvanometer zu wechseln gestattete, umgelegt, um den Ein-

fluss etwaiger Fernwirkungen, welche ihren Sinn gleichzeitig mit dem Hauptstrom wechselten, zu eliminiren.

Da bis zu erheblichen Stromstärken (über 20 Amp.) gegangen wurde, so musste hierbei eine ausserordentliche Erhitzung der Ringwicklung und dadurch des Ringes eintreten, welche wegen der eigenthümlichen Gestalt und der dadurch bedingten geringen Oberfläche durch Ausstrahlung nicht erheblich vermindert werden konnte. Der Ring wurde deshalb für diese Fälle in ein mit reinem Petroleum gefülltes, kreisrundes Glasgefäss gestellt und durch hineingelegtes Eis gekühlt. Er war dabei durch drei Holzscheibchen so erhöht, dass er ganz von der Flüssigkeit umspült war; das durch Schmelzung am Boden angesammelte Wasser konnte durch einen Heber entfernt werden. Dieses einfache Verfahren erwies sich sehr brauchbar; das eingetauchte Thermometer zeigte stets zwischen 10° und 20° .

Auf diese Weise wurde zunächst sorgfältig die normale Magnetisirungscurve des geschlossenen Ringes bestimmt (vgl. Nr. I g der Taf. IV), welche das reine Bild des magnetischen Verhaltens der untersuchten Eisensorte gibt und die Grundlage der weiteren Untersuchungen bildet.

Ein Versuch, die Hysteresiscurve bestimmen, führte zu der Erfahrung, dass das Resultat von der Zahl der Schritte abhing, und zwar in der Weise, dass die Summe der Magnetisierungsänderungen, welche das \oint für das höchste angewandte \oint ergab, um so kleiner ausfiel, je grösser die Zahl der Schritte war, welche zu diesem \oint führte. Diese Abweichung rührt, wie mir scheint, von der bei so dicken unzertheilten Gebilden aus weichem Eisen hauptsächlich infolge von Foucault'schen Strömen erheblichen magnetischen Verzögerung¹⁾ her. Infolge dieser ist die Zeit, welche der Ring zur Erreichung seines endgültigen Zustandes braucht, nicht mehr verschwindend im Vergleich zur Schwingungsdauer des Galvanometers. Dieser Fehler muss sich natürlich bei mehreren zu einer Magnetisirung erforderlichen Messungen durch Summirung vergrössern, während er ersichtlich bei der anderen Beobachtungsweise nur klein bleibt. Uebrigens ist er nur bei schwachen Feldern

1) Ewing, l. c. § 88.

von merklicher Grösse. Die Ermittlung von Hysteresiscurven wurde daher aufgegeben.

§ 6. Das Aufschlitzen des Ringes.

Nach der Bestimmung der Normalcurve für den geschlossenen Ring wurde letzterer in der Weise aufgeschlitzt, dass zunächst mit Hülfe einer Kreisfräse von 1 mm Dicke in dem dafür freigelassenen Raum (in der Mitte zwischen den Backen b_1 und b_2 , Fig. 6) ein radialer Schlitz möglichst eben, parallel und scharfkantig ausgeführt wurde. Um jedoch auch bei kleineren Schlitzweiten als 1 mm messen zu können, wurde um den Ring ein Messingreif (Fig. 9) gelegt, welcher an einer Stelle offen war und daselbst durch eine Schraube verkleinert oder vergrössert werden konnte. Dieser wirkte auf den Ring ein mittels kleiner Holzstückchen, welche so geschnitten waren, dass sie sich auf der einen Seite der Oberfläche des Ringes, auf der anderen der Innenseite des Reifens genau anpassten. Durch Anziehen der kräftigen Schraube konnte dadurch ein gleichmässiger radialer Druck auf den ganzen Ring ausgeübt werden, unter welchem derselbe sich soweit zusammenschloss, als ein in den Schlitz geschobenes Messing-scheibchen gestattete. Ein solches wurde zu jedem Schlitz zur genauen Fixirung seiner Stirnflächen in der erforderlichen Dicke geschnitten und zwar gleichfalls planparallel und mit einem Durchmesser gleich oder fast gleich dem des Ringquerschnittes.



Fig. 9.

Bei Schlitzen weiter als 1 mm, welche mit Fräsen von resp. 2 mm und 3,5 mm Dicke ausgeschnitten wurden, wurde die Benutzung des schliessenden Reifens unnöthig gemacht dadurch, dass das Messingplättchen in solcher Dicke hergestellt wurde, dass es nur mit einigem Zwang in den Schlitz geschoben werden konnte, wodurch der Ring sich vermöge seiner eigenen Elasticität fest anlegte.

Nachdem der Zwischenraum mit einem feinen Pinsel sorgfältig von allen etwaigen Eisentheilen gereinigt war, wurde das Messingplättchen eingeschoben und durch etwas geschmolzenen Wachs kitt oder Schellack in seiner centrischen Lage

fixirt. Darauf wurden (ausser bei dem ersten, engsten Schlitz) um den glattgefeilten Rand des Scheibchens eine Anzahl Windungen sehr feinen besponnenen Kupferdrahtes (von 0,15 mm und 0,25 mm Durchmesser incl. Isolirung) unter Zuhülfenahme einer Lupe sorgfältig nebeneinander gewickelt, derart, dass sie eine kleine den Zwischenraum gerade ausfüllende Spule von dem Durchmesser des Ringquerschnittes bildeten, mit Hülfe deren der Inductionsfluss durch den Luftraum (vgl. unten) gemessen werden konnte. Nachdem die Windungen in dieser Lage durch geschmolzenen Wackskitt befestigt waren, wurden die Enden des feinen Drahtes, welche den Schlitz an genau correspondirenden Stellen verliessen, in der Art, wie es die Fig. 10 zeigt, weitergeführt, dicht anliegend erst an dem Eisen, dann wieder umgebogen und an den Messingbacken aufwärts

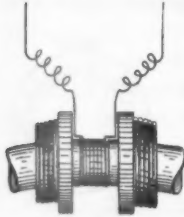


Fig. 10.

geführt und gleichfalls durch Kitt befestigt. Hierauf wurde die ganze nunmehr continuirliche Fläche zwischen den Backen gleichmässig mit Band oder weichem Bindfaden umwickelt und darüber die neun Windungen der primären Spirale, welche den Raum ausfüllten, gewickelt. Indem auch hierbei durch kleine parallel angelegte Stücke dickeren Bindfadens die hinausführenden Enden des feinen Drahtes vor

Berührung mit dem dicken Draht geschützt wurden, war das ganze System der kleinen Spule gegen Berührung und Verrückung sichergestellt. Die für die Messung nothwendige Verbindung mit der Leitung des Galvanometers wurde dann nach Aufstellung des Ringes durch Anlöthen an zwei Kupferstäbe hergestellt.

Die Messung der Schlitzweite wurde nach Vollendung der zugehörigen Messungsreihe mit der Theilmaschine ausgeführt, nachdem die Drahtwindungen entfernt, die Messingscheibe aber in dem Schlitz belassen war. Da die Kanten des Schnittes durch das Mikroskop unscharf und leicht gerundet erschienen, so wurde bei der Messung darauf geachtet, dass der Doppelfaden des Oculars nicht auf diese selbst, sondern auf das Verschwinden des Metallglanzes, welches durch eine ziemlich scharfe dunkle Linie erkennbar war, eingestellt wurde.

Auf diese Weise wurden für beide Seiten des Ringes aus je zehn Ablesungspaaren die Kantenabstände bestimmt, welche, zumal bei den kleinsten Schlitzten, Unterschiede von mehreren Procenten ergaben. Das arithmetische Mittel aus beiden ergab einen Werth, der durchweg etwas grösser war, als die direct (mit geaichtem Contactmikrometer) gemessene Dicke des Messingscheibchens. Es wurde daher wiederum das arithmetische Mittel aus der optischen und der directen Dickenmessung genommen und dieses als der mittlere Werth der Schlitzweite angesehen und in Rechnung gebracht.

§ 7. Theorie des geschlitzten Ringes.

Bevor wir zur Mittheilung der Messungsergebnisse übergehen, wird es sich empfehlen, die Resultate der von Hrn. du Bois¹⁾ gegebenen Theorie des geschlitzten Ringes in Kürze wiederzugeben, um dieselben dann auf die von uns untersuchten Fälle anwenden und mit den Ergebnissen der Beobachtung vergleichen zu können.

Indem wir uns seiner Bezeichnungswiese anschliessen, unterscheiden wir durch die Indices i und e , ob die mit denselben ausgestatteten Vektoren (\mathfrak{S} , \mathfrak{B} , \mathfrak{I}) von dem (magnetisirten) Eisen oder von anderen Ursachen herrühren; die resultirende geometrische (bei verschwindendem Richtungsunterschied algebraische) Summe beider wird durch den Index t (total) gekennzeichnet. Ferner wird durch Accentuiren angedeutet, dass die betreffende Grösse im Innern des Eisens betrachtet wird.

Für einen radial aufgeschlitzten, durch ein gleichförmig peripherisches Feld magnetisirten Eisenring (Fig. 11) ist der „selbstinducirte“ Antheil $\overset{E}{A}T_i$ des magnetischen Potentialzuwachses über die Axe des Schlitzes (l. c. Gleichung (7) p. 494):

$$(1) \quad \overset{E}{A}T_i = \bar{N} \mathfrak{I} (2\pi \varrho - d)$$

wo d die Weite des Schlitzes bedeutet.



Fig. 11.

1) du Bois, Wied. Ann. 46. p. 485. 1892. Vgl. auch: du Bois, Verh. d. phys. Ges. Berlin, 27. Juni. p. 81. 1890.

Wir können nun für ${}^E_A T_i$ einen zweiten Ausdruck bilden, indem wir in erster Annäherung die Magnetisirung über den ganzen Querschnitt constant und überall peripherisch gerichtet annehmen und uns daher beide Stirnflächen mit einer fictiven Belegung von der constanten Flächendichte $\pm \Im$ bedeckt denken. Die Ableitung dieses Ausdruckes sei hier eingeschaltet, da bei Hrn. du Bois nur das Resultat ohne Beweis gegeben wurde.

Die von einem Flächenelement eines so belegten Stirnfläche auf einen Punkt der im Mittelpunkte errichteten Normalen in Richtung derselben ausgeübte Componente der magnetischen Kraft ist (Fig. 12):

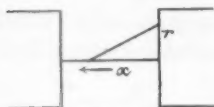


Fig. 12.

$$\frac{\Im \cdot r \cdot dr \cdot d\vartheta}{x^2 + r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}},$$

wo r und ϑ die Polarcoordinaten des Flächenelementes und x den Abstand des Punktes der Normale vom Fuss-

punkte bedeutet.

Die Integration über ϑ und r ergibt:

$$\begin{aligned} 2\pi \Im \cdot x \int_0^a \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} &= -2\pi \Im \cdot x \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_0^a \\ &= 2\pi \Im \cdot x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = 2\pi \Im \left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für die gesammte von der Stirnfläche her-rührende Kraftcomponente, über den Abstand beider Stirnflächen-mittelpunkte integrirt und mit zwei multiplicirt, gibt den Potentialzuwachs von A bis E :

$$\begin{aligned} {}^E_A T_i &= 2 \cdot 2\pi \Im \int_0^d x dx \int_0^a \frac{r \cdot dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= 4\pi \Im \left[\int_0^d dx - \int_0^d \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right] \\ &= 4\pi \Im \left\{ x_0^d - \sqrt{a^2 + x_0^d} \right\} \\ &= 4\pi \Im \{ d - [\sqrt{a^2 + d^2} - a] \}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad {}^E_A T_i = 4\pi \Im [d + a - \sqrt{d^2 + a^2}]^1).$$

Aus (1) und (2) folgt (indem wir für den Radius des Querschnittes anstatt a den Buchstaben r setzen):

$$\bar{N} = \frac{4\pi \Im (d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{\Im (2\pi \varrho - d)}$$

$$(3) \quad \bar{N} = \frac{2(d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{\varrho - \frac{d}{2\pi}}$$

Die Voraussetzung normal gegen die Stirnflächen gerichteter Magnetisirung und constanter Flächendichte der Belagungen, unter der dieser Ausdruck abgeleitet ist, trifft in Wirklichkeit zu für ein unendliches Feld, also für den Sättigungswerth von \Im , in welchem Falle $\bar{\Im} = \Im$ wird; wir werden daher das durch die Gleichung (3) definirte \bar{N} durch N_∞ bezeichnen.

Als zweite Annäherung gibt Hr. du Bois den Ausdruck (l. c. Gleichung (10) p. 495):

$$(4) \quad {}^E_A T_i = 4\pi \bar{\Im} d \cdot n,$$

wo die Zahl n nur Function des Verhältnisses d/r ist. Sie muss sehr nahe gleich sein dem reciproken Werthe des Hopkinson'schen Streuungscoefficienten ν , wie sich durch folgende Betrachtung näher erläutern lässt.

Ist S der Querschnitt des Ringes, $\mathcal{G} = \int \mathfrak{B} \cdot dS$ der Inductionsfluss durch denselben, so bedeutet nach der obigen Bezeichnungsweise \mathcal{G}_t den totalen Inductionsfluss durch den Schlitz, sodass:

1) In der angeführten Abhandlung des Hrn. du Bois p. 494 Gleichung (8) muss also das unrichtige Zwischenglied:

$$2 \int_0^d \frac{x dx}{\sqrt{r_2^2 + x^2}}$$

ersetzt werden durch

$$2 \cdot 2\pi \Im \int_0^d \int_0^r \frac{r_2 dr_2 x dx}{(r_2^2 + x^2)^{3/4}}.$$

Wie das Resultat, welches mit dem obigen genau übereinstimmt, beweist, liegt hier nur ein Abschreibfehler vor (r_2 entspricht der im Text mit r bezeichneten Grösse).

$$\frac{\mathfrak{G}_t}{S} = \mathfrak{B}_{tm} = \mathfrak{H}_{tm},$$

(wobei durch den Index m der Mittelwerth innerhalb des Querschnittes bezeichnet wird, während der Horizontalstrich den Mittelwerth längs einer Inductionslinie anzeigt), weil in Luft $\mathfrak{B}_t = \mathfrak{H}_t$; das nur vom Eisen herrührende \mathfrak{H} ist:

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_t - \mathfrak{H}_e.$$

Nun ist

$${}^A_E \mathcal{R}_i = \int_0^d \mathfrak{H}_{im} dL$$

(genommen über die Verbindungslinie der beiden Stirnflächen-centren) oder mit Rücksicht auf die geringe Veränderlichkeit von \mathfrak{H}_{im} innerhalb der Weite des Schlitzes:

$$\text{angenähert} = \mathfrak{H}_{im} \cdot d,$$

also nach Gleichung (4):

$$\mathfrak{H}_{im} \cdot d = {}^A_E \mathcal{R}_i = 4 \pi \mathfrak{J} d \cdot n,$$

woraus:

$$n = \frac{\mathfrak{H}_{im}}{4 \pi \mathfrak{J}}.$$

Den Hopkinson'schen Factor ν kann man aber definiren durch:

$$\nu = \frac{\overline{\mathfrak{G}}'_t \text{ (in Eisen)}}{\overline{\mathfrak{G}}_t \text{ (in Luft)}} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}'_t}{\overline{\mathfrak{B}}_{tm}} = \frac{4 \pi \mathfrak{J} + \overline{\mathfrak{H}}'_t}{\overline{\mathfrak{H}}_{tm}} = \frac{4 \pi \mathfrak{J} + \overline{\mathfrak{H}}'_t}{\overline{\mathfrak{H}}_{im} + \overline{\mathfrak{H}}_{em}}.$$

Nun verschwindet (wenigstens bei den anwendbaren, mässigen Feldern und bei mässigen Schlitzweiten)

$$\overline{\mathfrak{H}}'_t \text{ gegen } 4 \pi \mathfrak{J} \text{ (in Eisen)}$$

und

$$\overline{\mathfrak{H}}_{em} \text{ gegen } \overline{\mathfrak{H}}_{im} \text{ (in Luft)}^1),$$

daher:

$$\nu = \frac{4 \pi \mathfrak{J}}{\overline{\mathfrak{H}}_{im}} = \frac{1}{n}, \quad n = \frac{1}{\nu},$$

wie oben behauptet wurde.

1) Weil an der freien Stirnfläche:

$$\overline{\mathfrak{H}}_{im} \text{ (Luft)} = \overline{\mathfrak{H}}'_{im} \text{ (Eisen)} + 4 \pi \mathfrak{J}.$$

$\overline{\mathfrak{H}}_{im}$ steht nämlich wegen der Symmetrie um den Mittelpunkt der Stirnfläche senkrecht zu der letzteren.

Aus Gleichung (4) und (1) folgt weiter:

$$(5) \quad \bar{N} = \frac{4\pi \bar{S} d \cdot n}{\bar{S}(2\pi \varrho - d)} = \frac{2 d n}{\varrho - \frac{d}{2\pi}}.$$

Bei unendlich engem Schlitz würde $\nu = 1$, weil $\mathfrak{G}'_i = \mathfrak{G}_i$, also auch $n = 1$ werden.

In diesem Falle geht (5) über in:

$$(6) \quad \bar{N} = \frac{2 d}{\varrho} \cdot 1$$

In denselben Ausdruck geht der in Gleichung (3) gegebene Werth von \bar{N} (N_∞) über, wenn d/r unbegrenzt abnimmt.

Von Wichtigkeit ist ferner für uns der aus den Grenzbedingungen für \mathfrak{B}_i und \mathfrak{H}_i leicht zu beweisende Satz von der „Brechung der Inductionslinien“:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

wo α' und α die Winkel bedeuten, welche eine Inductionslinie innerhalb resp. ausserhalb des Eisens mit der Normale zur Grenzfläche zwischen Eisen und Luft bildet, und μ die Permeabilität ($\mathfrak{B}'_i / \mathfrak{H}'_i$).

Endlich sei noch der von Kirchhoff²⁾ bewiesene Satz erwähnt, dass bei unendlich gross werdender äusserer magnetischer Kraft (\mathfrak{H}_e resp. $\mathfrak{H}'_e = \infty$) die Richtung der Magnetisirung sich der Richtung der äusseren magnetischen Kraft überall unbegrenzt nähert.

1) Die von Ewing l. c. § 157 gegebene Näherungsformel:

$$N = \frac{4\pi \partial l}{l}$$

ist mit der Gleichung (6) identisch, da $\partial l = d$; $l = 2\pi \varrho$, also

$$N = \frac{4\pi d}{2\pi \varrho} = \frac{2 d}{\varrho}.$$

Eine hiermit bis auf unendlich geringe Differenzen übereinstimmende Formel hatte schon vorher Hr. du Bois (Verhandl. der physikal. Ges. Berlin vom 27. Juni 1890, p. 84) gegeben, nämlich:

$$N = \frac{4\pi \alpha}{360^\circ - \alpha},$$

wo

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\partial l}{l}.$$

2) Kirchhoff, Ges. Abh. p. 223 (am Schluss der Abh. p. 193.

§ 8. Beobachtungsmaterial und Resultate.

Die nachstehenden Tabellen enthalten die gesammten Messungsergebnisse.

Tabelle I.

Aufsteigende Commuturcurve bei geschlossenem Ring (g).

Φ	\mathfrak{I}	Φ	\mathfrak{I}	Φ	\mathfrak{I}
0,6	93,3	8,70	1020,0	55,1	1310,0
1,12	278,0	9,70	1051,0	76,5	1348,0
1,81	440,0	10,80	1076,0	104,5	1388,0
2,15	520,0	13,75	1118,0	151,0	1440,0
3,24	690,0	18,05	1165,0	200,0	1389,0
4,38	801,0	21,8	1192,0	240,0	1520,0
5,34	871,0	27,5	1225,0	315,0	1564,0
6,45	932,0	41,0	1275,0	385,0	1600,0
7,54	985,0				

Tabelle II.

Erste Schlitzcurve (1). Schlitzweite: 0,40 mm.

Φ_e	\mathfrak{I}	Φ_e	\mathfrak{I}	Φ_e	\mathfrak{I}
1,01	51,8	8,06	636,0	25,1	1127,0
2,00	141,5	10,0	758,0	31,5	1181,0
2,96	235,0	13,2	897,5	50,9	1262,0
4,01	335,0	16,15	986,0	99,0	1363,0
5,05	424,0	21,3	1082,0	192,5	1462,0
6,52	536,0				

Tabelle III.

Zweite Schlitzcurve (2). Schlitzweite 0,63 mm.

Am Schlitz: 4 Windungen von 0,15 mm (incl. Isolirung) dickem Kupferdraht.

Φ_e	\mathfrak{I}	Φ	Φ_e	ν	$\frac{1}{\nu}$
1,00	44,6	1412	—	—	—
2,63	170,5	5405	3540	1,528	0,655
4,01	279,0	8843	5805	1,524	0,657
5,85	415,0	13140	8720	1,508	0,663
7,93	554,0	17540	11490	1,528	0,655
11,0	712,5	22590	15040	1,502	0,666
14,0	837,5	26580	17700	1,500	0,667
17,1	935,0	29620	19800	1,495	0,669
19,95	1020,0	32320	21790	1,484	0,674
26,6	1095,0	34710	23850	1,456	0,687
33,7	1162,0	36840	25600	1,437	0,696
45,4	1228,0	38970	27400	1,420	0,704
59,2	1270,0	40350	29000	1,390	0,720
71,6	1305,0	41340	29880	1,385	0,722
84,8	1316,0	41900	30650	1,368	0,732
164,0	1420,0	45420	34150	1,330	0,752
250,0	1493,0	47900	36400	1,316	0,760
337,0	1545,0	49620	38300	1,296	0,772

Tabelle IV.

Dritte Schlitzcurve (3). Schlitzweite 1,03 mm.
Am Schlitz: 7 Windungen von 0,15 mm dickem Draht.

Φ_c	\mathfrak{I}	$\overline{\mathfrak{G}}$	\mathfrak{G}_δ	\mathfrak{G}_s	$\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\mathfrak{G}_s} = \nu$	$\frac{\mathfrak{G}_\delta}{\mathfrak{G}_s}$	$\frac{1}{\nu}$
1,62	69,3	2197	2390	—	—	—	—
2,44	117,3	3720	4035	2045	1,82	1,97	0,550
3,84	206,0	6520	7210	3660	1,78	1,97	0,561
5,06	279,0	8890	9760	4880	1,81	1,99	0,553
6,80	389,0	12120	13400	6720	1,81	1,99	0,553
8,88	492,0	15580	17100	8610	1,81	1,98	0,553
11,9	628,0	19910	21800	11230	1,78	1,94	0,563
14,9	748,0	23680	26030	13400	1,77	1,94	0,565
18,0	852,0	26970	29130	15230	1,77	1,91	0,565
20,9	923,0	29260	31700	16650	1,76	1,90	0,568
24,25	988,0	31300	33560	18000	1,74	1,86	0,575
27,2	1036,0	32850	34850	18900	1,74	1,84	0,575
36,9	1141,0	36190	37640	21400	1,69	1,76	0,591
49,0	1200,0	38120	39120	23200	1,645	1,68	0,608
64,5	1250,0	39800	40400	24750	1,61	1,63	0,621
78,5	1285,0	40870	41200	25800	1,585	1,60	0,631
99,5	1325,0	42230	42230	27030	1,56	1,56	0,641
181,0	1428,0	45600	45400	30550	1,495	1,49	0,670
267,0	1500,0	48120	47040	32800	1,47	1,43	0,681
(300)	1525,0	48900	48000	32500	1,50	1,48	0,667

\mathfrak{I}	\mathfrak{G}_δ	\mathfrak{G}_{SO}	\mathfrak{G}_O	\mathfrak{G}_{NO}	\mathfrak{G}_s
492	17100	16650	15850	14400	8610
988	33560	32850	32100	29400	18000
1525	48000	48000	48000	48000	32500

Tabelle V.

Vierte Schlitzcurve (4). Schlitzweite 2,02 mm.
Am Schlitz: 7 Windungen von 0,25 mm Dicke.

Φ_c	\mathfrak{I}	$\overline{\mathfrak{G}}$	\mathfrak{G}_δ	\mathfrak{G}_s	$\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\mathfrak{G}_s} = \nu$	$\frac{\mathfrak{G}_\delta}{\mathfrak{G}_s}$	$\frac{1}{\nu}$
2,50	92,2	2920	3310	1178	2,48	2,82	0,403
5,24	212,0	6720	7670	2650	2,54	2,90	0,394
8,38	348,0	11030	12600	4420	2,50	2,86	0,400
11,93	487,0	15400	17630	6230	2,47	2,84	0,405
17,1	675,0	21350	24500	8630	2,47	2,84	0,405
23,6	845,0	26760	30960	10940	2,44	2,83	0,410
31,9	997,0	31570	34750	13150	2,40	2,64	0,417
40,15	1080,0	34230	36730	14650	2,34	2,51	0,428
68,5	1220,0	38780	39750	17400	2,23	2,28	0,449
111,0	1320,0	41970	42000	20050	2,09	2,09	0,479
260,0	1520,0	48550	46250	24400	1,99	1,90	0,502

\mathfrak{Z}	\mathfrak{G}_δ	\mathfrak{G}_{SO}	\mathfrak{G}_O	\mathfrak{G}_{NO}	\mathfrak{G}_s
487	17630	17030	15950	13800	6230
997	34750	33550	32100	28700	13150
1520	46250	46000	46300	46100	24400

Tabelle VI.

Fünfte Schlitzcurve (5). Schlitzweite 3,57 mm.
Am Schlitz: 14 Windungen von 0,25 mm Dicke.

\mathfrak{G}_s	\mathfrak{Z}	\mathfrak{G}	\mathfrak{G}_δ	\mathfrak{G}_s	$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_s} = \nu$	$\frac{\mathfrak{G}_\delta}{\mathfrak{G}_s}$	$\frac{1}{\nu}$
4,01	131	4150	4880	1086	3,82	4,5	0,262
7,5	260	8220	9760	2140	3,84	4,6	0,260
11,0	384	12140	14400	3160	3,85	4,6	0,260
14,5	503	15900	18800	4160	3,82	4,53	0,262
19,0	634	20000	23500	5800	3,78	4,44	0,265
25,0	785	24850	29100	6600	3,77	4,41	0,266
32,0	923	29200	33650	7750	3,77	4,34	0,266
40,0	1015	32100	36200	8800	3,66	4,12	0,274
65,1	1170	37000	39700	10930	3,39	3,63	0,296
101,0	1265	40100	41700	12750	3,15	3,27	0,318
140,0	1335	42400	43450	14100	3,01	3,08	0,333
245,0	1455	46500	46350	16800	2,77	2,76	0,362

\mathfrak{Z}	\mathfrak{G}_δ	\mathfrak{G}_{SO}	\mathfrak{G}_O	\mathfrak{G}_{NO}	\mathfrak{G}_s
503	18800	17900	16200	13500	4160
1015	36200	34500	32700	28300	8800
1455	46350	46100	(46600)	45800	16800

Die Tabelle I enthält die Daten der Curve des geschlossenen Ringes, mit den bekannten Bezeichnungen \mathfrak{H} ($\mathfrak{H}_i = 0$; $\mathfrak{H}_e = \mathfrak{H}$) für die Stärke des durch den umkreisenden Strom erzeugten magnetischen Feldes, \mathfrak{Z} für die Magnetisirung, deren Messung in § 5 besprochen wurde.

Die folgenden fünf Tabellen enthalten die Daten der fünf Schlitzcurven, welche resp. zu den Schlitzweiten 0,40 mm, 0,63 mm, 1,03 mm, 2,02 mm und 3,57 mm gehören.

Da infolge der Unterbrechung der Continuität des Ringes eine selbstentmagnetisierende Kraft im Innern des Eisenringes auftritt, so müssen wir streng unterscheiden zwischen der durch den Strom erzeugten äusseren magnetischen Kraft \mathfrak{H}_e ¹⁾,

1) Wir lassen der Einfachheit halber die durch die du Bois'sche Bezeichnungsweise für das Innere der magnetischen Substanz vorgeschriebenen Accente weg.

welche im Innern des Ringes herrschen würde, wenn derselbe etwa aus Holz wäre, und der thatsächlich im Innern herrschenden (totalen) Kraft \mathfrak{H}_t , welche die algebraische Summe von \mathfrak{H}_e und der entmagnetisirenden Kraft \mathfrak{H}_i ist: $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_i$, wobei \mathfrak{H}_i dem \mathfrak{H}_e entgegengesetzt gerichtet ist.

Das in den Tabellen angeführte \mathfrak{H} ist die äussere Kraft \mathfrak{H}_e , welche nach der bei dem geschlossenen Ringe angewandten Methode gemessen ist. Die Auffindung des \mathfrak{H}_i , welches den eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung bildet, werden wir weiter unten in diesem Paragraphen erörtern.

Bei der Berechnung von \mathfrak{Z} aus der Formel (2b) des § 5b:

$$\mathfrak{Z} = \frac{\frac{R}{N} \cdot \frac{b}{2} \alpha - 4,24 \mathfrak{H}}{31,85}$$

ist zu beachten, dass das \mathfrak{H} der Correction 4,24 \mathfrak{H} das thatsächlich herrschende Feld \mathfrak{H}_e ist, wobei wir die beiden nur annähernd richtigen Annahmen machen, dass

1. das Feld auch jetzt noch innerhalb des ganzen Querschnittes von der Gleichförmigkeit wenig abweiche, sodass die Zahl der den Eisenquerschnitt durchsetzenden Kraftlinien = 2,52 \mathfrak{H}_e ¹⁾, wenn \mathfrak{H}_e der Werth von \mathfrak{H} in der Mitte des Querschnittes wäre;

2. dass das Feld in dem vom Eisenringe nicht ausgefüllten Raume der primären Windungen durch die entmagnetisirende Kraft in demselben Verhältnisse geschwächt sei, wie das Feld im Innern des Eisenringes.

Zu der letzteren Annäherungsannahme berechtigt uns der Satz:

$$\mathfrak{H}_{tr} = \mathfrak{H}_{tr}',$$

welcher aussagt, dass die tangentielle Componente der totalen magnetischen Kraft bei dem Uebergange durch die Grenzfläche zwischen Eisen und Luft keinen Sprung erleidet und welcher hier Anwendung findet, weil (wie durch besondere unten zu besprechende Messungen gezeigt wird) die Richtung der Kraftlinien ausser in nächster Nähe des Schlitzes überall peripherisch bleibt.

Uebrigens überschreitet, wie die Tabellen zeigen, die

1) 2,52 cm² ist der Querschnitt des Eisenringes.

Correction $4,24 \mathfrak{H}_t$, nur bei den stärksten Feldern den Werth von 1 Proc. der gesammten Kraftlinienzahl, sodass Annäherungen der obigen Art vollkommen genügen.

Der Werth von \mathfrak{H}_t wird leicht aus der Curve des geschlossenen Ringes gewonnen, indem zunächst durch Weglassung der Correction ein angenäherter Werth von \mathfrak{Z} aus der Formel (2b) berechnet und das zu diesem gehörige \mathfrak{H}_t aufgesucht wird. Ergibt dann der corrigirte Werth von \mathfrak{Z} etwa eine zu grosse Abweichung von dem vorher angenommenen, so kann man zu diesem wieder ein richtigeres \mathfrak{H}_t aufsuchen und danach die Correction ausführen etc., wodurch man eine beliebige Annäherung an das richtige \mathfrak{H}_t erzielen könnte, worauf es aber aus dem eben angeführten Grunde gar nicht ankommt.

Da infolge der Durchschneidung der Inductionsfluss von Querschnitt zu Querschnitt variiert, die secundären Windungen aber die ganze Oberfläche des Ringsolenoids gleichmässig bedecken, so ist das so bestimmte \mathfrak{Z} der Mittelwerth aller bei einem bestimmten \mathfrak{H}_t über sämtliche Ringquerschnitte vertheilten Magnetisirungen.

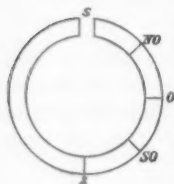


Fig. 13.

$\bar{\mathfrak{G}} = \int \mathfrak{H}_t \cdot dS$ bedeutet den mittleren Inductionsfluss durch den ganzen Querschnitt (wobei wir unter Inductionsfluss die Gesamtheit der durch einen Querschnitt des Eisens gehenden Inductionslinien verstehen), welchen wir aus der vom Galvanometer angezeigten mittleren Kraftlinienzahl erhalten, indem wir die ausserhalb des Eisens verlaufenden $4,24 \mathfrak{H}_t - 2,52 \mathfrak{H}_t = 1,72 \mathfrak{H}_t$ abziehen, eine Correction, über welche in Bezug auf die nur angenäherte Richtigkeit das obengesagte gilt.

Die weiteren in den Tabellen vorkommenden Grössen sind alle von ähnlicher Art wie die letztgenannte, resp. aus solchen gebildet. Sie geben die Inductionsflüsse durch verschiedene Querschnitte des Ringes an, welche nach der Durchschneidung ja nicht mehr gleiche Werthe aufweisen.

Zur leichteren Uebersicht haben wir für die drei verschiedenen Zwischenlagen zwischen dem Schlitz (s) der diametral gegenüberliegenden Stelle des Ringes (δ) die Bezeich-

nungen der Windrose, wie es das Schema der Fig. 13 erläutert, gewählt, wodurch die Bedeutung der Grössen \mathcal{G}_s , \mathcal{G}_δ , \mathcal{G}_{so} , \mathcal{G}_o , \mathcal{G}_{No} ohne weiteres verständlich ist.

Gemessen wurden dieselben wie folgt:

\mathcal{G}_s durch die § 6 eingehend beschriebene feine Spule, deren Windungsfläche jedesmal dem Querschnitt des Eisenringes genau gleich gemacht war; die Zahl ihrer Windungen ist für jeden Schlitz bei den Tabellen vermerkt;

\mathcal{G}_δ mit Hülfe einer an der diametralen Stelle δ über einen den Ring umschliessenden Carton gewickelten schmalen Spule von sieben Windungen $\frac{1}{2}$ mm dicken Kupferdrahtes, wobei zur Reduction auf den Eisenquerschnitt die Correction $-1,72 \mathcal{G}_s$ angebracht wurde;

\mathcal{G}_{so} , \mathcal{G}_o , \mathcal{G}_{No} mit Hülfe einer ganz ähnlichen, aber beweglichen Spule von sechs Windungen; diese drei Grössen, deren Bestimmung dazu dienen sollte, um eine Urtheil über den Verlauf der Kraftlinienstreuung längs des Ringumfanges und deren Aenderung mit wachsender Magnetisirung zu geben, wurden nur bei drei Werthen von \mathcal{J} , nämlich annähernd bei 500, 1000, 1500 c. g. s. gemessen und in den angehängten kleineren Tabellen zusammengestellt. Zur Reduction auf den Querschnitt diente gleichfalls die Correction $-1,72 \mathcal{G}_s$.

Es ist ferner:

$\mathcal{G}/\mathcal{G}_s = \nu$ das Verhältniss des mittleren Inductionsflusses zu dem am Schlitz (und, weil auf gleiche Querschnitte bezogen, auch dasjenige der beiden entsprechenden Mittelwerthe der Induction \mathcal{B}_δ), welches nach Hopkinson¹⁾ als Streuungscoefficient bezeichnet werden muss.

Hinzugefügt sind noch die Werthe für $1/\nu$, welches, wie wir im vorigen Paragraph sahen, sehr nahe gleich der Function n ist, und die Werthe für $\mathcal{G}_\delta/\mathcal{G}_s$.²⁾

Die Werthe der \mathcal{G}_s und \mathcal{J} sind in den Curven Nr. I der Taf. IV

1) J. u. E. Hopkinson, Phil. Trans. 177. p. 331. 1886.

2) Auffallend in den Tabellen ist der Umstand, dass bei den höchsten Magnetisirungen der Werth von \mathcal{G} denjenigen von \mathcal{G}_s übersteigt. Dies rührt ohne Zweifel daher, dass der Ring, der bei den hier erforderlichen starken Strömen stark gekühlt werden musste, anfänglich vor Beginn der Messungsreihe eine ziemlich niedrige Temperatur an-

graphisch auf der rechten Seite der Ordinaten (\mathfrak{S})-Axe aufgetragen, für den geschlossenen Ring und für die fünf Schlitzze, und sind zur Unterscheidung bezeichnet durch:

g , (1), (2), (3), (4), (5),

zugehörig zu den Schlitzweiten:

0.0,40.0,63.1,03.2,02.3,57 mm.

Für die Abscisse \mathfrak{S}_e sind drei Maassstäbe angewandt, und zwar ist der anfänglich von $\mathfrak{S} = 0$ bis $\mathfrak{S} = 1000$ angewandte, von da bis $\mathfrak{S} = 1300$ fünffach und von hier aufwärts zwanzigfach verkleinert. Dies ist geschehen einerseits wegen der grossen Ausdehnung, welche die oberen flacheren Theile der Curven unter Beibehaltung des Maassstabes für die unteren steileren Theile hätten einnehmen müssen, andererseits, weil hierdurch alle Theile der Curven eine passende Neigung erhalten, welche den allmählich wachsenden Einfluss der Schlitzze am besten erkennen lässt.

Diese graphische Darstellung aller charakteristischen Grössen in übersichtlicher Weise setzt uns nun in den Stand, auf sehr einfache Weise die entmagnetisirende Kraft zu finden. Die Curve (g) des geschlossenen Ringes gibt uns das wahre Bild der Abhängigkeit der Magnetisirung, welche an irgend einem Punkte stattfindet, von der an demselben Punkte wirkenden magnetischen Kraft. Diese Abhängigkeit ist allein bedingt durch die Natur des Materials, aus welchem der Ring besteht, und hat mit seiner äusseren Form nichts zu thun. Wir können daher umgekehrt aus dieser Curve zu jeder Magnetisirung die wirkliche magnetische Kraft entnehmen, welche diese Magnetisirung hervorgebracht haben muss.

Wenden wir diese Erkenntniss auf die Schlitzcurven an, so erhalten wir auch für diese aus der Curve (g) für jede

genommen hatte, welche bei der Bestimmung des immer zuerst gemessenen \mathfrak{G} wohl noch nicht genügend durch die Erhitzung compensirt war. In der Nähe des Sättigungszustandes wächst nämlich die Magnetisirung mit abnehmender Temperatur. Dass jenem Umstande kein principiell Gewicht beizumessen ist, derselbe vielmehr nur Folge von Beobachtungsfehlern sein kann, sieht man aus den entsprechenden Werthen der angehängten Tabelle, welche alle unterhalb des Werthes von \mathfrak{G} bleiben. Auch bei diesen ist offenbar der Einfluss desselben Beobachtungsfehlers in kleineren, unregelmässigen Schwankungen erkennbar.

Magnetisirung den Werth der wahren magnetischen Kraft \mathfrak{H}_0 , indem wir die zu der gleichen Ordinate \mathfrak{Z} gehörige Abscisse der Curve (g) aufsuchen, d. h. indem wir durch den fraglichen Curvenpunkt eine Parallele zur Abscissenaxe ziehen. Die Abscisse des Schnittpunktes dieser Parallele mit der Curve (g) ist das gesuchte \mathfrak{H}_i ; die Differenz beider Abscissen ist daher:

$$\mathfrak{H}_e - \mathfrak{H}_i = -\mathfrak{H}_i^1)$$

(da $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_i^1$), das ist derjenige Theil der äusseren magnetischen Kraft, welcher nöthig war, um die durch den Schlitz hervorgebrachte selbstentmagnetisirende Kraft \mathfrak{H}_i zu compensiren, und ist also dieser letzteren entgegengesetzt gleich.

Tragen wir alle durch eine derartige graphische Subtraction²⁾ sich ergebenden Werthe von \mathfrak{H}_i zur Linken der Ordinatenaxe als Function der zugehörigen Magnetisirungen auf, so erhalten wir eine Anzahl von Curven, welche den Schlitzcurven zur Rechten entsprechen und deshalb in der Tafel durch die entsprechenden Bezeichnungen (1), (2), (3), (4), (5) unterschieden sind.

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass dieses Verfahren jenseits $\mathfrak{Z} = 1000$ rasch seine Brauchbarkeit verliert, weil infolge der von da ab bei allen Curven einschliesslich (g) eintretenden mehr oder weniger starken Umbiegung die Abscissendifferenzen klein werden gegen die Abscissen von (g); wodurch etwaige kleine Fehler in der Bestimmung der Abscissen für die relativ kleine Differenz zu procentisch sehr grossen Fehlern werden. Indessen ist, wie wir unten sehen werden, die Kenntniss der Entmagnetisirungcurven (wie wir die Curven links der Kürze halber nennen wollen) oberhalb jenes Werthes von \mathfrak{Z} wenig von Belang.

Das so (in Tabellen und Curven) zusammengestellte Beobachtungsmaterial liefert uns ausser dem Verlauf der Magnetisirungcurven folgende Hauptergebnisse. Aus den Tabellen:

1. *Die Streuung*, welche durch den Coefficienten $\nu = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ gemessen wird, nimmt zu mit wachsender Schlitzweite und nimmt mit wachsender Magnetisirung schliesslich ab.

1) Wir lassen hier wieder der Einfachheit halber die Accente weg.

2) Dieses Verfahren ist im wesentlichen analog dem bei Ellipsoiden angewandten Rayleigh-Ewing'schen Scheerungsverfahren.

2. Ueber den *Verlauf der Kraftlinien* erfahren wir aus den angehängten Tabellen, dass auch bei schwachen Magnetisierungen — wo die Streuung am grössten ist — der Inductionsfluss durch den Ringquerschnitt erst in einer Entfernung von ca. $\frac{1}{8}$ der Ringperipherie beiderseits vom Schlitz (\mathfrak{G}_{No}) merklich abzunehmen beginnt, dass also *die Divergenz der Kraftlinien wesentlich auf die Nachbarschaft des Schlitzes beschränkt ist*, während der Verlauf in den übrigen Theilen des Ringes merklich peripherisch bleibt. Der Divergenzbereich wird mit wachsender Magnetisirung eingeengt.

Dasselbe Ergebniss liefert der Vergleich des mittleren Inductionsflusses \mathfrak{G} mit dem diametralen \mathfrak{G}_d , welcher einen geringen, mit wachsender Magnetisirung schwindenden Unterschied beider Grössen ergibt.

3. Die Streuung ist (bei gleichbleibender Schlitzweite) bis etwa $\mathfrak{S} = 850^1$) nahe constant; von da ab erleidet sie mit zunehmender Magnetisirung eine beschleunigte Abnahme.

Betrachten wir 1700—1750²⁾) als den Sättigungswerth von \mathfrak{S} , so können wir sagen: *Die Streuung ist etwa bis zur Hälfte des Sättigungswerthes von \mathfrak{S} merklich constant.*

Gehen wir zu den Curven über, so lehrt uns die Betrachtung der linksseitigen Curven (vgl. Nr. I der Taf. IV):

4. *Die Entmagnetisierungscurven weichen bis etwa $\mathfrak{S} = 850$, d. i. ungefähr bis zur halben Sättigung nicht merklich von geraden Linien ab.*

Drücken wir die Abhängigkeit der selbstentmagnetisirenden Kraft \mathfrak{H}_i von der Magnetisirung \mathfrak{S} aus durch die Gleichung:

$$\mathfrak{H}_i = N \cdot \mathfrak{S}$$

und nennen N den Entmagnetisierungsfactor, so können wir den obigen Satz ausdrücken: *Zu jeder Schlitzweite gehört ein ungefähr bis zur halben Sättigung nahe constanter Entmagnetisierungsfactor.*

1) Als Mitte des Bereiches zwischen 750 und 950, in welchen der Beginn einer merklichen Abnahme fällt.

2) Ewing, l. c. § 98 und § 105.

§ 9. Vergleich der Resultate mit der Theorie.

Wir wollen zuerst zeigen, dass die Abnahme der Streuung mit wachsender Magnetisirung eine nothwendige Folge der beiden am Schlusse von § 7 erwähnten Sätze ist.¹⁾

Dass bei unendlich werdender magnetischer Kraft die Magnetisirung \mathfrak{I} mit der äusseren magnetischen Kraft \mathfrak{H}_e gleichgerichtet, also in unserem Falle peripherisch gerichtet wird, folgt direct aus dem Kirchhoff'schen Satz. Für $\mathfrak{H}_e = \infty$, d. i. für den Sättigungswerth von \mathfrak{I} , findet also keine Streuung statt, der Coefficient $\nu = \mathfrak{G} / \mathfrak{G}_e$ wird dann gleich 1.

Die allmähliche Annäherung an diesen idealen Grenzfall bedingt aber nothwendig eine allmähliche Abnahme der Divergenz der Kraftlinien innerhalb des Eisens, d. h. der Winkel, welchen dieselben an der Oberfläche des Ringes mit der inneren Normale an dieser Stelle bilden, muss sich mehr und mehr einem Rechten nähern. Aus dem oben erwähnten Satze:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \alpha',$$

wo α' und α resp. den inneren und äusseren Normalenwinkel der Kraftlinien bedeuten, folgt aber, dass bei grosser Permeabilität μ , wie sie bekanntlich dem anfänglichen Theil der Magnetisirungscurve entspricht, die Brechung der Kraftlinien derart stattfindet, dass beim Austritt aus dem Eisen die Divergenz derselben plötzlich bedeutend wächst. Während nun die Magnetisirung weiter wächst, nimmt μ rasch ab, indem es gegen 1 convergirt. Die Zunahme der Divergenz beim Austritt aus dem Eisen wird also mit wachsender Magnetisirung in ähnlichem Verhältniss abnehmen, die Brechung der Kraftlinien kleiner und kleiner werden.

Kommt nach dem Obigen hinzu, dass mit wachsendem Felde die Kraftlinien innerhalb des Eisens von der tangentialen

1) *Anm. bei der Corr.* Die folgenden Ausführungen werden meines Erachtens durch die kürzlich veröffentlichten Bemerkungen des Hrn. Culmann (Wied. Ann. 48. p. 380. 1893) in keiner Weise entkräftet; überhaupt scheint mir im ganzen und grossen jener Notiz weniger der Charakter einer Kritik, als der eines Commentars zur Arbeit des Hrn. du Bois innezuwohnen.

Richtung immer weniger abweichen, so ist klar, dass diese beiden Umstände eine rasche Abnahme der Streuung mit wachsender Magnetisirung bewirken müssen.

Des weiteren diene zum Vergleich der Theorie mit den Versuchsergebnissen die nachfolgende Tabelle (VII).

Tabelle VII.

Bez.	d	$\frac{d}{r}$	ν	n	berechnet		\bar{N} (beob.)	Differenz
					N_∞	\bar{N}		
(1)	0,40	0,045	1,81 ⁽⁶⁾	0,765	0,0098	0,0077	0,0079	+ 2,5%
(2)	0,63	0,070	1,52	0,660	0,0151	0,01045	0,0102	- 2,5%
(3)	1,03	0,115	1,79	0,558	0,0242	0,01445	0,0140	- 3 %
(4)	2,02	0,226	2,48	0,403	0,0451	0,0205	0,0203	- 1 %
(5)	3,57	0,400	3,81	0,262	0,0726	0,0236	0,0246	+ 4 %

Es bedeuten darin:

d die Schlitzweite, gewonnen in der § 6 beschriebenen Weise als Mittel aus der directen und der optischen Dickenmessung;

d/r das Verhältniss der Schlitzweite zum Radius des Querschnittes;

N_∞ die durch die Formel (3) des § 7 definirte Grösse:

$$\bar{N} = \frac{2(d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{q - \frac{d}{2\pi}},$$

welche, wie oben erwähnt, für $\mathfrak{S} = \infty$ strenge Gültigkeit hat;

ν den Streuungscoefficienten, gewonnen als Mittel aus den bis zum halben Sättigungswerth von \mathfrak{Z} beobachteten nahe constanten Werthen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_s$;

n den reciproken Werth des Streuungscoefficienten (vgl. § 7);

\bar{N} (ber.) die durch die Formel (5) des § 7 definirte Grösse:

$$\bar{N} = \frac{2 d \cdot n}{q - \frac{d}{2\pi}};$$

\bar{N} (beob.) den aus dem geradlinigen Theile der Entmagnetisirungscurven (von $\mathfrak{Z} = 0$ bis zur angenähert halben Sättigung) graphisch entnommenen Werth des Entmagnetisirungsfactors $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{Z}$.

Endlich:

Diff. die Differenz \bar{N} (beob.) — \bar{N} (ber.) in Procenten.

Von diesen Grössen sind berechnet aus der Theorie N_∞ und \bar{N} (ber.), die übrigen aus der messenden Beobachtung hervorgegangen. Die Tabelle VII enthält in jeder Zeile die einer bestimmten Schlitzweite zugehörigen Werthe dieser Grössen, jede Zeile ist gekennzeichnet durch die vorangestellte Nummer, welche der entsprechenden Curve Nr. I der Taf. IV entnommen ist.

Der erste der fünf Werthe für ν ist durch Interpolation gewonnen (was durch das Zeichen (*i*) angedeutet ist), und zwar auf folgende Weise:

In Nr. II der Taf. IV sind die sämmtlichen beobachteten Werthe¹⁾ des ν aufgetragen als Function von \mathfrak{S} , sodass sie für jeden der vier Schlitzte, bei welchem die Streuungen gemessen sind, je einen Curvenzug bilden. Der Beginn derselben ist, wie man sieht, geradlinig und parallel der Abscissenaxe und zwar bis etwa $\mathfrak{S} = 850$ (halbe Sättigung). Die Curven sind dann über die beobachteten Werthe hinaus verlängert bis zu dem theoretisch geforderten gemeinsamen Convergenzpunkt $\nu = 1$ für den Sättigungswerth von \mathfrak{S} , für welchen $\mathfrak{S} = 1750$ c. g. s. als höchster beobachteter Werth angenommen ist.²⁾

Wenn wir nun, wie es gleichfalls in Nr. II der Taf. IV geschehen ist, eine zweite Scala für die Werthe der Quotienten d/r auf der Abscissenaxe anbringen, und über dieser die Werthe von ν , wie sie die Reihen (2), (3), (4), (5) der obigen Tabelle angeben, als Function von d/r auftragen, so erhalten wir vier, oder, wenn wir berücksichtigen, dass für verschwindendes d/r (also für $d = 0$, d. i. für den geschlossenen Ring) $\nu = 1$ werden muss, fünf Punkte, welche augenscheinlich auf einer geraden Linie liegen.

Diese gerade Linie liefert uns für den Zusammenhang der Grössen ν und d/r die rein empirische *Interpolationsformel*:

1) Wegen der oben (§ 8 Anm.) besprochenen Ungenauigkeit sind die den höchsten Magnetisirungen zugehörigen Werthe von ν nicht mit in die Tafel eingetragen.

2) Dieser Werth ist von Hrn. du Bois bei Anwendung der magneto-optischen Methode (Kerr'sches Phänomen) beobachtet worden (vgl. Ewing, l. c. § 105).

$$\nu = 1 + 7 \frac{d}{r} \quad \left(\text{bis } \frac{d}{r} = \text{ca. } \frac{1}{2} \right).$$

Durch diese geradlinige Interpolation ist schliesslich der Werth ν der Reihe (1) (Punkt. (1), Nr. II der Taf. IV) ermittelt.

Der in der Tab. VII angestellte Vergleich der Beobachtungs- und Rechnungsgrössen zeigt, dass die Abweichungen zwischen N (beob.) und \bar{N} (ber.) sich auf wenige Procente beschränken und zwar in positivem wie negativem Sinne. Zur Vergleichung der Grenzwerte des Entmagnetisirungsfactors N_∞ mit den Beobachtungen sind die zu (1), (2), (3) gehörigen Werthe von N_∞ durch in Nr. I der Taf. IV links oberhalb $\mathfrak{Z} = 1000$ eingetragene gerade Linien dargestellt, welche durch die beigeetzten Nummern gekennzeichnet sind. Dabei ist zu beachten, dass die Annäherung einer Entmagnetisirungscurve an die entsprechende gerade Linie keine asymptotische sein muss, weil die Curve mit $\mathfrak{Z} = \text{ca. } 1750$ abbricht. Bei diesem Werthe muss vielmehr ein gemeinsamer Schnittpunkt beider Linien liegen. Eine schätzungsweise Verlängerung der Entmagnetisirungscurven über $\mathfrak{Z} = 1000$ hinaus lässt nun in der That eine Annäherung dieser Art zweifellos erkennen.

Wir sehen darin eine *Bestätigung der Theorie* und dürfen damit eine Hauptfrage unserer Untersuchung als in bejahendem Sinne beantwortet betrachten.

Die experimentelle Bestätigung der Theorie des Hrn. du Bois für den vorliegenden Specialfall bildet rückschliessend eine Stütze für die Annahmen, auf welchen dieselbe aufgebaut ist.

Dies gilt insbesondere von der Behauptung, dass der echte Bruch n , also auch der ihm reciproke Streuungscoefficient ν nur Function des Verhältnisses d/r , aber *unabhängig von dem Radius des Ringes* sei, welche in der Theorie dadurch ausgesprochen ist, dass der Ausdruck für den Potentialzuwachs im Schlitz (Gleichung (4) § 7):

$${}^E_4 T_i = 4 \pi \bar{\mathfrak{Z}} \cdot d \cdot n$$

von zwei halb unendlichen Cylindern hergeleitet wird, welche den Querschnitt des Ringes haben und sich in einem Abstände gleich der Weite des Schlitzes gegenüber stehen. Das so hergeleitete n hat, wie wir gezeigt haben, die Bedeutung

$$\frac{\bar{S}_{i.m.}}{4\pi\bar{S}} = \frac{1}{r},$$

worin \bar{S} den Mittelwerth aller Magnetisirungen längs einer Inductionslinie, also innerhalb des ganzen Ringumfanges, bezeichnet.

Nun hat aber der Versuch gezeigt, dass \bar{S} *ausser in nächster Nähe des Schlitzes* einen merklich constanten Werth über alle Querschnitte hat. Eine Vergrösserung oder Verkleinerung des Ringumfanges bei gleichbleibender mittlerer Magnetisirung \bar{S} würde daher — unter der allen unseren Betrachtungen zu Grunde liegenden Voraussetzung, dass der Radius des Ringes gross sei gegen den des Querschnittes — keinen merklichen Einfluss auf den Werth von \bar{S} am Schlitz haben. Da aber der Werth von $\bar{S}_{i.m.}$ nur von dem Magnetisirungszustande in nächster Nähe des Schlitzes abhängt, so folgt, dass die entfernteren Theile des Ringes ohne merklichen Einfluss auf den Bereich des Schlitzes sind, dass also die Beobachtung im Einklange mit der Theorie ergibt:

„Die Streuung ist unabhängig vom Radius des Ringes und ist nur Function der relativen Schlitzweite“ (so bezeichnen wir das Verhältniss d/r).

Dass der Streuungscoefficient auch von \bar{S} , bis zur halben Sättigung, unabhängig ist, haben wir oben gesehen; der zweite Theil des vorstehenden Satzes gilt daher unter der gleichen Beschränkung.

Die so bestätigte Theorie gibt ferner die Mittel an die Hand, unter Benutzung der von uns ermittelten empirischen Beziehung des Streuungscoefficienten zu den Dimensionen des Schlitzes, den *Entmagnetisirungsfactor* für das System des unvollständig geschlossenen Ringes aus rein geometrischen Daten zu bestimmen, wie folgt:

$$\eta = \frac{1}{r} = \frac{1}{1 + 7 \frac{d}{r}}$$

$$\bar{N} = \frac{2 d \eta}{g - \frac{d}{2\pi}} = \frac{2 d}{\left(g - \frac{d}{2\pi}\right) \left(1 + 7 \frac{d}{r}\right)}.$$

§ 10. Schluss.

Wir fassen die *Hauptergebnisse* der vorliegenden Arbeit zusammen in folgenden Sätzen, gültig für einen unvollständig geschlossenen ferromagnetischen Ring, dessen Radius gross ist gegen den Radius des Querschnittes:

1. Der Entmagnetisirungsfactor, das ist derjenige Factor, welcher mit der mittleren Magnetisirung multiplicirt die mittlere selbstentmagnetisirende Kraft gibt, ist constant bis ungefähr zur halben Sättigung.

2. Der Streuungscoefficient, das Verhältniss der mittleren Induction zu derjenigen im Schlitz, ist constant bis zur halben Sättigung.

3. Der Bereich der Kraftlinienstreuung ist wesentlich auf die Nachbarschaft des Schlitzes beschränkt und wird mit wachsender Magnetisirung eingeengt.

4. Der Streuungscoefficient ist unabhängig vom Radius des Ringes; er hängt dagegen im Bereiche seiner Constanz (Satz 2) nur ab von der relativen Schlitzweite (d/r). Der empirische Ausdruck dieser Abhängigkeit ist ein linearer von der Form:

$$1 + h \cdot \frac{d}{r}$$

wo h eine Constante ist, welche für das untersuchte schwedische Eisen den Werth 7 hat und vermuthlich für andere ferromagnetische Metalle hiervon nur wenig abweichende Werthe ergeben würde. Namentlich dürfte dies für die in der Technik angewandten Eisensorten zutreffen.

5. Der Entmagnetisirungsfactor ist bei Kenntniss der empirischen Constante h aus den geometrischen Dimensionen des Systems zu berechnen nach der Formel:

$$\bar{N} = \frac{2d}{\left(\varrho - \frac{d}{2\pi}\right) \left(1 + h \cdot \frac{d}{r}\right)},$$

wo ϱ der Radius des Ringes, r derjenige des Querschnittes und d die Schlitzweite. Diese Formel gilt unter der gleichen Beschränkung wie 1., 2. und 4., nämlich bis zur halben Sättigung.

Allgemein gilt:

$$\bar{N} = \frac{2d}{\left(\varrho - \frac{d}{2\pi}\right)} \cdot \frac{1}{\nu},$$

wo ν der Streuungscoefficient.

6. Für sehr hohe Magnetisirungen nähert sich der Entmagnetisirungsfactor dem Grenzwerthe:

$$N_{\infty} = 2 \frac{(d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{\varrho - \frac{d}{2\pi}}.$$

Die vorstehenden Resultate dürften auch bei complicirter gestalteten unvollkommenen magnetischen Kreisen eine angenäherte Anwendung finden.

Zum Schluss sei es mir gestattet, an dieser Stelle Hrn. Prof. Kundt für die Anregung zu dieser Arbeit, und Hrn. Dr. du Bois für die zahlreichen Rathschläge, mit welchen derselbe mich bei deren Ausführung unterstützte, meinen herzlichsten Dank zu sagen.

Berlin, Physik. Institut d. Univ., Januar 1893.

III. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die ferromagnetische Circularpolarisation; von Emil Hirsch.¹⁾

(Mitgetheilt aus dem physikal. Institut der Universität Berlin.)

(Hiersu Taf. V Fig. 13–18.)

§ 1. Einleitung.

Hr. Kundt wies schon, als er die Circularpolarisation für Eisen als Function der magnetisirenden Intensität bestimmt hatte, auf die Wichtigkeit hin, auch die Beziehung zwischen der Drehung und der Magnetisirung der Schichten kennen zu lernen.²⁾

Dieser Frage wandte sich dann Hr. du Bois³⁾ zu und gelangte zu der Gleichung

$$\varepsilon = \Psi(\mathfrak{J} \cdot d),$$

worin ε die Drehung der Polarisationssebene, $(\mathfrak{J} \cdot d)$ die Zunahme des „Magnetisirungspotentials“ von einer Seite der Schicht zur anderen bezeichnet; für den Proportionalitätsfactor Ψ wurde später⁴⁾ der Name „Kundt'sche Constante“ vorgeschlagen, der seitdem auch von anderen Autoren adoptirt worden ist.

Die temporäre Magnetisirung von Eisen, Kobalt und Nickel wird bekanntlich im allgemeinen durch Temperaturänderungen beeinflusst, und bei höheren Temperaturen, die für die drei Metalle sehr verschieden sind, schwindet sie fast vollständig. Es ist nun von Interesse zu ermitteln, welchen Einfluss die Temperatur auf die Circularpolarisation in den drei ferromagnetischen Metallen ausübt. Die Versuche, die ich zur Lösung dieser Frage im hiesigen physikalischen Institut angestellt habe, bilden den Gegenstand vorliegender Arbeit.

1) Nach des Verf. Inauguraldissertation (Berlin 1893) für die Annalen bearbeitet.

2) Kundt, Wied. Ann. 23. p. 228. 1884; 27. p. 197. 1886.

3) du Bois, Wied. Ann. 31. p. 941. 1887.

4) du Bois, Wied. Ann. 39. p. 40. 1890.

Bevor ich indessen zur Darstellung meiner Versuche übergehe, ist es mir Bedürfniss, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath Kundt, der die Anregung zu dieser Arbeit gegeben, für das derselben gütigst gewidmete Interesse meinen ehrerbietigsten Dank abzustatten. Auch bin ich den Hrn. Arons und du Bois, die mich durch werthvolle Rathschläge in liebenswürdigster Weise unterstützt haben, zu grossem Danke verpflichtet.

§ 2. Versuchsanordnung.

Die durchsichtigen Metallschichten wurden in der gewohnten Weise¹⁾ hergestellt. Auf ca. 2 mm dicke, nicht doppelbrechende Glasplatten wurde eine durchsichtige Platin-schicht eingebrannt. Auf diese platinirten Gläser wurden dann die Metallschichten galvanoplastisch niedergeschlagen. Zur Bestimmung der Circularpolarisation wurde ein Lippich'scher Halbschattenapparat verwandt. Der Winkel zwischen den beiden Hauptschnitten wurde gewöhnlich auf 15° eingestellt. Als Lichtquelle diente ein Zirkonbrenner, dessen Strahlen vor dem Eintritt in den optischen Apparat eine Linse und ein rothes Glas durchsetzten. Das magnetische Feld lieferte ein grosser verticaler Electromagnet. Die spitzen Polstücke waren in ca. 4 mm lichter Weite durchbohrt. Durch einen Strom von 33 Amp. aus dem städtischen Leitungsnetz konnte zwischen denselben, wenn sie einander auf 4 mm genähert waren, noch ein Feld von 22 000 C. G. S. erzeugt werden. Da ich jedoch durch die im Folgenden beschriebene Heizvorrichtung gezwungen war, mit den Polen weiter auseinander zu gehen, erreichte ich nicht ganz 9000 C. G. S.-Einheiten. Ueber den ganzen Electromagnet wurde ein grosses, seitlich offenes Holzgestell aufgebaut, sodass nur oben die Polstücke freilagen. Der Lippich'sche Apparat sowie der Analysator waren direct an dasselbe angeschraubt.

Die Heizvorrichtung hatte folgenden Bedingungen zu genügen. Vor allem musste sie eine gleichmässige Erwärmung der Schichten ermöglichen. Dann musste sie gestatten, nacheinander eine Stelle des Platinglases, welche mit der Metall-

1) Vgl. Kundt, Wied. Ann. 23. p. 231. 1884.

schicht bedeckt war, und eine solche, welche beim galvanoplastischen Niederschlag nicht mit Metall überzogen war, in das Gesichtsfeld zu bringen. Sie musste ferner so construiert sein, dass die Metallschichten in horizontaler wie in verticaler Richtung beliebig justirt werden konnten. Endlich musste erreicht werden, dass während eines Versuches immer wieder dieselbe Stelle der Metallschichten in das Gesichtsfeld gelangten, da die Schichten an verschiedenen Stellen verschiedene Dicke aufweisen konnten.

Mit Rücksicht darauf wurde folgender Apparat construiert. Ein hart gelötheter Messingkasten (Fig. 13 a) von 0,2 cm Wandstärke, 21 cm Länge, 4,7 cm Höhe und 1,6 cm Breite trug in der Mitte der Längswände vorn und hinten zwei Oeffnungen von ca. 2 cm Durchmesser, die durch aufschraubbare Deckgläser verschlossen werden konnten. Die eine der Seitenwände *a* war nicht mit dem Kasten fest verbunden; sie wurde nur durch eine Schraube *c*, die in ein massives Ansatzstück von *a* hineinfasste, am übrigen Theil des Apparates festgehalten. Diese Seitenwand *a* sowie die ihr gegenüberliegende *b* waren in ca. 0,2 cm Höhe vom Boden des Apparates durchbohrt und liessen durch die entstandenen Oeffnungen eine cylindrische Messingstange *m* von 0,5 cm Durchmesser und 42 cm Länge frei hindurchgehen. Diese Messingstange trug den wesentlichsten Theil des Apparates (Fig. 13 b). In der Mitte derselben war eine Messingplatte *l* von 0,2 cm Dicke, 3,7 cm Höhe und 4,4 cm Länge hart gelöthet. An dieser Platte *l*, die in 0,7 cm Höhe von der Stange einen rechteckigen Ausschnitt *o* zeigte, wurden die zu untersuchenden, mit Metallschichten belegten Glasplatten durch zwei Federn *n* aus Neusilber festgehalten. Letztere durften nur leicht auf die Gläser drücken, da sonst Doppelbrechung in denselben aufgetreten wäre.

Um ein Schwanken des beschriebenen Schlittens nach hinten zu verhüten, trug die Platte *l* oben einen Ansatz *r* von der Breite des nach der Hinterwand noch freien Zwischenraumes. Eine Bewegung der Platte nach vorn war dadurch ausgeschlossen, dass die in der Mitte ausgebuchteten Federn *n* die Vorderwand bereits streiften.

Die Einführung der mit den Metallschichten belegten

Glasstücke in den Apparat geschah in folgender Weise. Zuerst wurden die Gläser vorsichtig unter die Federn geschoben, sodass der Ausschnitt von *l* theilweise durch die Metallschicht, theilweise durch eine vom Niederschlag freie Stelle des Platinglases bedeckt wurde. Dann wurde die Seitenwand *a* vom Kasten gelöst, die Verschiebungsvorrichtung so weit hineingeschoben, dass die Messingstange *m* aus der Durchbohrung der gegenüberliegenden Wand *b* herausragte, darauf *a* über das andere Ende von *m* geschoben und der Kasten geschlossen. Dass bei einer Versuchsreihe die Drehung immer genau an derselben Stelle der Metallschicht bestimmt werden konnte, wurde durch zwei Anschläge bewirkt, die auf der Messingstange *m* verschoben und mit Schrauben auf ihr befestigt werden konnten. Mittels dieser Anschläge wurde nacheinander Metallschicht und Platinglas in den Strahlengang gebracht. Die Beobachtung der Drehung in den den Kasten schliessenden Deckgläsern wurde vor und nach jeder Versuchsreihe für eine bestimmte Temperatur vorgenommen.

Zur Heizung dienten zwei Bunsenbrenner, die zu beiden Seiten der Polstücke am Gestell des Electromagneten befestigt waren. Die Temperatur wurde zunächst mit zwei Thermometern bestimmt, die von oben durch Röhrenansätze in den Heizkasten hineinragten; deren Quecksilbergefüsse befanden sich also zu beiden Seiten der Metallschichten. Vor jeder Beobachtungsreihe wurde gewartet, bis die Thermometer eine halbe Stunde lang keine merklichen Temperaturschwankungen gezeigt hatten. Bei den Versuchen mit Eisen und Kobalt, bei denen es, wie sich zeigen wird, nur auf eine angenäherte Kenntniss der Temperatur ankam, genügte die thermometrische Bestimmung. Bei den meisten Beobachtungen am Nickel hingegen wurden genaue Temperaturwerthe auf thermoelectrischem Wege ermittelt, und zwar in folgender Weise.

Benutzt wurde eine Eisen-Neusilberkette; sie zeigte innerhalb des von mir benutzten Bereichs von 100° bis 350° vollkommene Proportionalität zwischen Temperaturdifferenz ihrer Löthstellen und Galvanometeraus Schlag. Auch bei wiederholten Kalibrirungen, die einer jeden Beobachtung vorausgingen, traten keine Abweichungen hervor. Zur Kalibrirung wurden

sieben Geissler'sche Stickstoffthermometer — jedes für ein Bereich von etwa 50° gültig — benutzt, die in der physikalisch-technischen Reichsanstalt geeicht waren. Ihre Theilung erlaubte noch Fünftelgrade abzulesen.

Um sicher zu sein, dass die Löthstelle wirklich die Temperatur der Metallschicht annahm, musste man erstere direct an letztere anlegen. Die Kette wurde daher in der durch Fig. 14a und 14b dargestellten Weise in den Heizapparat eingeführt. Fig. 14a zeigt zunächst den Kasten mit eingeführter Thermokette im Längsdurchschnitt. *A* ist ein Aufsatz auf dem Kasten, der durch ein Korkstück dicht geschlossen wurde. Durch dieses gingen, durch Glasröhren isolirt, die Drähte, die zu der einen Löthstelle der Thermokette führten, hindurch. Der Zwischenraum, der oben an der Vorderseite der Platte / zwischen dieser und der Vorderwand des Kastens sich befand, genügte reichlich, die 0,7 mm starken Zuleitungsdrähte der Thermokette hindurchzuführen. Die Art, wie die Löthstelle auf dem Spiegel auflag, veranschaulicht Fig. 14b im Querschnitt. *l* ist wieder die Messingplatte, *m* die Glasplatte mit der Metallschicht und *t* die Thermokette. Diese war hinter ihrer Eintrittsstelle in den Apparat etwas ausgebogen, sodass sie nur mit der Löthstelle *L* (Fig. 2a) auf der Metallschicht etwas unterhalb der von dem Lichtbündel durchstrahlten Stelle fest auflag. Die Galvanometerbeobachtungen wurden bei nicht erregtem Electromagneten vor und nach den einzelnen magneto-optischen Beobachtungsreihen vorgenommen.

Die Temperatur im beschriebenen Apparate durfte die niedrigste „Anlaufemperatur“ des benutzten Metalls offenbar nicht überschreiten. Nach Vorversuchen hatte sich jene (bei kurzer Erhitzung) für Eisen zu 220° , für Kobalt zu 280° ergeben. Beim Nickel beobachtete ich bei der höchsten angewandten Temperatur von ca. 340° C. noch keine Oxydation. Um auch die Versuche für Eisen und Kobalt über die angegebenen Grenzen hinaus ausdehnen zu können, musste die Erwärmung in Wasserstoff ausgeführt werden. Es wurde zuerst versucht, dies in der bereits beschriebenen Heizvorrichtung auszuführen; es zeigte sich jedoch bald, dass dies unmöglich war. Die Undichtigkeiten an der aufgeschraubten Seitenwand wie an den Durchbohrungen für den Schlitten liessen sich trotz aller

Sorgfalt nicht völlig beseitigen, und die Metallschichten oxydirteten sich infolgedessen beim Erhitzen.

Nach vielen vergeblichen Versuchen einen Weg zu finden, auf dem man eine Oxydation vermeiden könnte, gelang dies endlich mit folgendem Apparate, der äusserlich nicht viel von dem früher benutzten abwich. Fig. 15 zeigt zunächst das Gesamtbild desselben. Wesentliche Aenderungen weist nur der Schlitten auf. Die mittlere Messingplatte *l* hatte eine Stärke von 0,6 cm, eine Länge von 4,4 cm und eine Höhe von 3,3 cm. In der Mitte zeigte sie einen rechteckigen Ausschnitt von 1 cm Höhe und 3 cm Breite. Auf der Hinterseite dieses Ausschnittes lag eine planparallele, nicht doppelt brechende, 0,1 cm starke Glasplatte, durch zwei Neusilberstreifen leicht an die Messingplatte gedrückt. Auf der Vorderseite waren in gleicher Weise durch zwei Neusilberfedern die Versuchsobjecte befestigt, wobei die Metallschicht der Innenseite des kleinen so entstehenden Hohlraumes zugekehrt war. Durch den letzteren wurde durch zwei Messingröhren *m*, die gleichzeitig als Verschiebungstangen dienten, das Gas geleitet. Die Röhren hatten je eine Länge von 21 cm, einen lichten Durchmesser von 0,3 cm und waren luftdicht in die Seitenwände der Platte *l* eingeschraubt. Dieser Apparat mag im Folgenden zur Unterscheidung von Apparat I — dem vorher beschriebenen — Apparat II genannt werden.

Zur Bestimmung der Feldintensität wurden direct die Platingläser benutzt, die vorher mit einer geaichten Etalonglasplatte verglichen waren. Die Aichung der letzteren geschah in der gewohnten Weise. Es wurde in demselben Felde die Drehung in Wasser für Natriumlicht und die Drehung in einer etwa 1 cm starken Flintglasplatte für das bei den Versuchen benutzte rothe Licht bestimmt. Ich fand auf diese Weise, dass ein Grad einfacher Drehung des rothen Lichtes im Flintglase einem Felde von rund 1100 C. G. S.-Einheiten entsprach. Mittels dieses Factors sind die im Folgenden angegebenen Werthe der Feldintensität berechnet. Die Platingläser wie die Deckgläser des Apparates waren bei den Vorversuchen auch während des Heizens und nach dem Erkalten auf Doppelbrechung untersucht worden. Es hatte sich dabei gezeigt, dass bei vorsichtigem Erwärmen und langsamem Erkalten der Eintritt einer Doppelbrechung ganz zu vermeiden war.

§ 3. Beobachtungen und Resultate.

Die Circularpolarisation wächst bekanntlich in Eisen, Kobalt und Nickel nicht proportional der Intensität des magnetischen Feldes, sondern sie strebt einem Maximum zu, welches streng genommen erst bei unendlicher Feldintensität erreicht wird, von dem aber schon in viel schwächeren Feldern die Drehung sich für unsere Zwecke nicht mehr merklich unterscheidet. Diese Verhältnisse lassen sich am besten durch eine graphische Darstellung der Beziehung zwischen Feldintensität und Magnetisirung, wie sie in § 4 angegeben ist, veranschaulichen. Im Anschlusse daran wurde daher bei den Versuchen unterschieden zwischen Beobachtungen in Feldbereichen, bei denen das betreffende Metall seine Maximalmagnetisirung genügend nahe erreicht hat (Bereich B) und solchen, bei denen es sich noch bedeutend unterhalb dieses Maximums befindet (Bereich A, vgl. Fig. 17). Die Versuche im Bereiche des angenäherten Drehungsmaximums konnten sich nur auf Nickel erstrecken, da, wie oben angedeutet, bei der gewählten Anordnung Felder über 9000 C. G. S. nicht zu Gebote standen und man sich der Maximaldrehung für Eisen und Kobalt erst bei höheren Werthen derselben nähern kann.

A. Eisen, Kobalt und Nickel im Feldbereiche A.

Untersucht wurden sechs Eisen-, sechs Kobalt- und zwei Nickelschichten. Die Versuche für die Eisen- und Kobaltschichten I—IV wurden in dem Apparate I in Luft ausgeführt, die für die Schichten V und VI im Apparate II in einer Wasserstoffatmosphäre. Für die beiden Nickelschichten, die im Apparate I untersucht wurden, wurde die thermoelectrische Temperaturbestimmung benutzt. Bei Eisen und Kobalt wurde die höchste erzielbare Feldintensität (ca. 8400 C. G. S.) gewählt; bei Nickel Felder von 4500 und 3700 C. G. S.

Unter Drehung ist im Folgenden immer die Doppeldrehung (bei Commutiren des Stromes) verstanden. Für jede Ablesung wurden zehn Einstellungen gemacht, aus denen dann der Mittelwerth genommen wurde, sodass für jeden in den Tabellen gegebenen Werth 20 Einstellungen nöthig waren. Die Ein-

stellungen variirten untereinander; doch betrugen die Abweichungen höchstens 5'. Die Einstellungen für die Platingläser und Deckgläser waren ungleich genauer; sie variirten im allgemeinen nur um 2'. In den Tabellen sind in Spalte 1 die Temperaturen angegeben; 2. gibt die Drehung in Metallschicht, Platinglas und Deckgläsern zusammen; 3. diejenige in Deckgläsern und Platinglas; 4. in den Deckgläsern allein. In der 5. Spalte sind die durch die Subtraction von 2 und 3 gefundenen Werthe der Drehung in der Metallschicht allein verzeichnet, während die 6. Spalte die in gleicher Weise aus der Differenz von 3 und 4 erhaltenen Drehungen im Platinglas allein gibt. In den Tab. 1 und 2 für die Eisen- und Kobaltschichten V und VI addiren sich zu den Drehungswerthen für die Platingläser noch diejenigen der hinteren Verschlussglasplatte.

In Tab. 3 (die beiden Nickelspiegel betreffend) geben die einzelnen Spalten dieselben Werthe, nur dass in der ersten noch die Ausschläge des Galvanometers verzeichnet sind. Die Drehungsbeobachtungen in den Deckgläsern und infolgedessen auch die aus der Differenzbestimmung gewonnenen Werthe im Platinglase allein fallen fort. Denn es war, wie aus den Fig. 14a und 14b ersichtlich, nicht möglich, die Platte *l* wie bei den anderen Beobachtungen gänzlich aus dem Gesichtsfelde zu verschieben, da die Löthstelle in einer Höhe mit den Federn *n* auf dem Versuchsobjecte auflag. Bei Eisen und Kobalt sind die angegebenen Feldintensitäten aus den Drehungswerthen der letzten Spalte, wie schon erwähnt, durch Vergleichen mit der Etalonglasplatte berechnet. Bei dem fast constanten Werthe der Feldintensität während der Beobachtung an einer Schicht konnte davon abgesehen werden, sie für jede Versuchsreihe bei jeder einzelnen Temperatur anzugeben. Die vorhandenen Abnahmen der Drehung der Platingläser zeigen durch ihren regelmässigen Verlauf wie durch ihr Zurückgehen beim Sinken der Temperatur, dass sie lediglich durch Erhöhung der letzteren hervorgerufen sind. Dass die Feldintensität selbst unter dem Einfluss der erhöhten Temperatur abgenommen hätte, war ausgeschlossen, denn die Polstücke wiesen bei den höchsten Temperaturen des Kastens nur eine Erwärmung von 10° bis 15° auf. Für die in Tab. 3 angeführten Beobachtungen

mit Nickelschichten wurden die Feldintensitäten vor Beginn und nach Ende des Versuches direct mit der Etalonglasplatte bestimmt.

Tabelle 1.

Eisen. Feldbereich A.

Temperatur	Drehung im Fe + Platinglas + Deckglas	Drehung im Platinglas + Deckglas	Drehung im Deckglas	Drehung im Fe	Drehung im Platinglas
Eisenschicht I. Feldint.: 8410 C. G. S.					
23°	5° 16,4'	3° 11,4'	1° 57,8'	2° 5,0'	1° 13,6'
95°	5° 16,6'	3° 10,9'	1° 57,4'	2° 5,7'	1° 13,5'
150°	5° 15,4'	3° 10,0'	1° 56,8'	2° 5,4'	1° 13,2'
200°	5° 13,9'	3° 9,1'	1° 56,1'	2° 4,8'	1° 13,0'
25°	5° 16,8'	3° 11,7'	1° 57,9'	2° 5,1'	1° 13,8'
Eisenschicht II. Feldint.: 8430 C. G. S.					
22°	6° 17,3'	3° 20,2'	1° 58,2'	2° 57,1'	1° 22,0
110°	6° 17,0'	3° 19,8'	1° 57,8'	2° 57,2'	1° 22,0
155°	6° 16,6'	3° 19,1'	1° 57,0'	2° 57,5'	1° 22,1
210°	6° 14,4'	3° 17,9'	1° 56,1'	2° 56,5'	1° 21,8
22°	6° 17,2'	3° 20,3'	1° 58,1'	2° 56,9'	1° 22,2
Eisenschicht III. Feldint. 8400 C. G. S.					
24°	4° 53,3'	3° 1,2'	1° 57,5'	1° 52,1'	1° 3,7'
97°	4° 53,0'	3° 1,1'	1° 57,4'	1° 51,9'	1° 3,7'
142°	4° 53,2'	3° 0,8'	1° 57,2'	1° 52,4'	1° 3,6'
203°	4° 52,1'	3° 0,3'	1° 56,8'	1° 51,8'	1° 3,5'
23°	4° 53,6'	3° 1,4'	1° 57,4'	1° 52,2'	1° 4,0'
Eisenschicht IV. Feldint.: 8830 C. G. S.					
24°	5° 43,8'	3° 17,9'	2° 4,3'	2° 25,9'	1° 13,6'
105°	5° 44,0'	3° 17,6'	2° 4,2'	2° 26,4'	1° 13,4'
162°	5° 42,8'	3° 17,0'	2° 3,6'	2° 25,8'	1° 13,4'
207°	5° 42,6'	3° 16,6'	2° 3,5'	2° 26,0'	1° 13,1'
24°	5° 44,2'	3° 17,9'	2° 4,3'	2° 26,3'	1° 13,6'
Temperatur	Drehung im Fe + Platinglas + Deckglas + Verschlussgl.	Drehung im Platinglas + Deckglas + Verschlussgl.	Drehung im Deckglas	Drehung im Fe	Drehung im Platinglas + Ver- schlussgl.
Eisenschicht V. Feldint.: 8410 C. G. S.					
Zimmertemp.	6° 41,08'	4° 5,32'	1° 57,88	2° 35,76	2° 7,44'
205°	6° 38,80'	4° 2,92'	1° 55,96	2° 35,88	2° 6,96'
263°	6° 37,00'	4° 2,08'	1° 55,36	2° 34,92	2° 6,72'
347°	6° 36,28'	4° 0,88'	1° 54,52	2° 35,40	2° 6,36'
Zimmertemp.	6° 40,24'	4° 4,84'	1° 57,48	2° 35,40	2° 7,36'

Temperatur	Drehung im Fe + Platinglas + Deckglas + Verschlussgl.	Drehung im Platinglas + Deckglas + Verschlussgl.	Drehung im Deckglas	Drehung im Fe	Drehung im Platin- glas + Ver- schlussgl.
------------	---	---	---------------------------	------------------	--

Eisenschicht VI. Feldint.: 8810 C. G. S.

Zimmertemp.	6° 18,92'	3° 59,60'	2° 4,28'	2° 19,32'	1° 55,32'
220°	6° 16,52'	3° 57,56'	2° 2,60'	2° 18,96'	1° 54,96'
282°	6° 15,08'	3° 56,72'	2° 1,88'	2° 18,36'	1° 54,84'
351°	6° 14,24'	3° 55,52'	2° 0,92'	2° 18,72'	1° 54,60'
Zimmertemp.	6° 18,92'	3° 59,84'	2° 4,58'	2° 19,08'	1° 55,26'

Tabelle 2.

Kobalt. Feldbereich A.

Temperatur	Drehung im Co + Platinglas + Deckglas	Drehung im Platinglas + Deckglas	Drehung in Deckglas	Drehung im Co	Drehung im Platinglas
------------	--	---	---------------------------	------------------	-----------------------------

Kobaltschicht I. Feldint.: 8410 C. G. S.

25°	4° 38,40'	3° 9,72'	1° 57,84'	1° 28,68'	1° 11,88'
98°	4° 36,84'	3° 8,52'	1° 56,64'	1° 28,32'	1° 11,88'
208°	4° 36,24'	3° 7,08'	1° 55,68'	1° 29,16'	1° 11,40'
262°	4° 35,40'	3° 5,64'	1° 54,72'	1° 29,76'	1° 10,92'
24°	4° 38,88'	3° 9,48'	1° 57,72'	1° 29,40'	1° 11,76'

Kobaltschicht II. Feldint.: 8450 C. G. S.

24°	4° 11,48'	3° 6,92'	1° 58,52'	1° 4,56'	1° 8,40'
107°	4° 10,64'	3° 5,72'	1° 57,56'	1° 4,92'	1° 8,16'
222°	4° 8,96'	3° 3,92'	1° 56,36'	1° 5,04'	1° 7,56'
259°	4° 7,16'	3° 2,48'	1° 55,40'	1° 4,68'	1° 7,08'
26°	4° 10,88'	3° 6,68'	1° 58,40'	1° 4,20'	1° 8,28'

Kobaltschicht III. Feldint.: 8820 C. G. S.

23°	4° 6,32'	3° 14,00'	2° 4,2'	52,32'	1° 9,80'
121°	4° 4,52'	3° 12,56'	2° 3,44'	51,96'	1° 9,12'
227°	4° 3,92'	3° 11,36'	2° 2,96'	52,56'	1° 8,40'
263°	4° 2,96'	3° 10,28'	2° 2,24'	52,68'	1° 8,04'
25°	4° 6,44'	3° 14,36'	2° 4,64'	52,08'	1° 9,72'

Kobaltschicht IV. Feldint.: 8400 C. G. S.

24°	4° 38,40'	3° 2,40'	1° 57,6'	1° 36,0'	1° 4,80'
105°	4° 36,68'	3° 1,20'	1° 56,64'	1° 35,48'	1° 4,56'
210°	4° 35,88'	2° 59,76'	1° 55,68'	1° 36,12'	1° 4,08'
266°	4° 34,32'	2° 58,56'	1° 54,84'	1° 35,76'	1° 3,72'
25°	4° 38,16'	3° 2,04'	1° 57,36'	1° 36,12'	1° 4,68'

30*

Temperatur	Drehung im Co + Platinglas + Deckglas + Verschlussgl.	Drehung im Platinglas + Deckglas + Verschlussgl.	Drehung im Deckgl.	Drehung im Co	Drehung im Platin- glas + Ver- schlussgl.
Kobaltschicht V. Feldint.: 8800 C. G. S.					
Zimmertemp.	5° 53,24'	4° 9,68'	2° 4,04'	1° 43,56'	2° 5,64'
225°	5° 50,00'	4° 6,08'	2° 1,76'	1° 43,92'	2° 4,32'
278°	5° 49,04'	4° 4,88'	2° 1,04'	1° 44,16'	2° 3,84'
354°	5° 47,24'	4° 3,70'	2° 0,32'	1° 43,54'	2° 3,38'
Zimmertemp.	5° 53,34'	4° 9,74'	2° 3,98'	1° 43,60'	2° 5,76'
Kobaltschicht VI. Feldint.: 8410 C. G. S.					
Zimmertemp.	5° 25,20'	4° 6,60'	1° 57,84'	1° 18,60'	2° 8,76'
254°	5° 20,64'	4° 1,68'	1° 54,72'	1° 18,96'	2° 6,96'
313°	5° 18,84'	4° 0,60'	1° 54,20'	1° 18,24'	2° 6,40'
348°	5° 18,12'	3° 59,64'	1° 53,28'	1° 18,48'	2° 6,36'
Zimmertemp.	5° 25,08'	4° 6,24'	1° 57,72'	1° 18,84'	2° 8,52'

Tabelle 3.

Nickel. Feldbereich A.

Ausschlag am Galvano- meter	Temperatur	Drehung im Ni + Platinglas + Deckglas	Drehung im Platinglas + Deckglas	Drehung im Ni
Nickelschicht IX. Feldint.: 4520 C. G. S.				
	Zimmertemp.	2° 34,46'	1° 32,18'	1° 2,28'
	109°	2° 33,92'	1° 31,88'	1° 2,04'
219 mm	173°	2° 33,80'	1° 31,40'	1° 2,40'
456 mm	254°	2° 33,66'	1° 30,91'	1° 2,75'
618 mm	309°	2° 30,14'	1° 30,46'	59,68'
650 mm	321°	2° 1,88'	1° 30,38'	31,50'
695 mm	336°	1° 29,98'	1° 30,22'	— 0,24'
	Zimmertemp.	2° 34,28'	1° 32,16'	1° 2,12'
Nickelschicht V. Feldint.: 3710 C. G. S.				
	Zimmertemp.	1° 57,12'	1° 20,84'	36,28'
	112°	1° 56,48'	1° 20,52'	35,96'
231 mm	178°	1° 56,31'	1° 20,13'	36,18'
436 mm	247°	1° 55,56'	1° 19,80'	35,76'
609 mm	306°	1° 55,92'	1° 19,58'	36,34'
634 mm	315°	1° 46,38'	1° 19,49'	26,89'
698 mm	337°	1° 19,86'	1° 19,38'	+ 0,48'
	Zimmertemp.	1° 57,25'	1° 20,79'	36,46'

Für Eisen und Kobalt zeigt nun das in Tab. 1 und 2 zusammengestellte Beobachtungsmaterial in dem untersuchten

Temperaturintervall bis ca. 350° eine innerhalb der Fehlergrenze vollkommene Unabhängigkeit der Circularpolarisation von Temperaturänderungen.

Ein gleiches Verhalten zeigen nach Tab. 3 die Nickelschichten, bis bei einer Temperatur von etwas über 300° ein plötzlicher Abfall der Drehung eintritt. Ob diese absolut verschwindet, ist nicht zu ersehen; die bald positiven, bald negativen Differenzen der Werthe aus Spalte 3 und 4 liegen innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler. Für Nickel sind die Resultate oberhalb 250° in Fig. 16 graphisch dargestellt.

Tabelle 4.
Nickel. Feldbereich B.

Temperatur	Drehung im Ni + Platinglas + Deckglas	Drehung im Platinglas + Deckglas	Drehung im Deckglas	Drehung im Ni	Drehung im Platinglas
Nickelschicht I. Feldint.: 8440 C. G. S.					
23°	4° 4,64'	3° 9,44'	1° 58,2'	0° 55,2'	1° 11,24'
100°	4° 4,68'	3° 9,24'	1° 58,08'	0° 55,44'	1° 11,16'
200°	4° 3,36'	3° 8,52'	1° 57,6'	0° 54,84'	1° 10,92'
277°	4° 1,92'	3° 6,72'	1° 56,28'	0° 55,2'	1° 10,44'
315°	3° 55,08'	3° 6,36'	1° 56,04'	0° 48,72'	1° 10,32'
24°	4° 4,92'	3° 9,60'	1° 58,32'	0° 55,32'	1° 11,28'
Nickelschicht II. Feldint.: 8380 C. G. S.					
23°	4° 15,60'	3° 4,56'	1° 57,24'	1° 11,04'	1° 7,32'
120°	4° 14,76'	3° 4,08'	1° 56,88'	1° 10,68'	1° 7,20'
210°	4° 14,40'	3° 2,88'	1° 56,16'	1° 11,52'	1° 6,72'
295°	4° 12,12'	3° 1,20'	1° 54,96'	1° 10,92'	1° 6,24'
320°	3° 23,20'	3° 0,84'	1° 54,84'	0° 22,36'	1° 6,00'
25°	4° 15,60'	3° 4,20'	1° 57,12'	1° 11,40'	1° 7,08'
Nickelschicht III. Feldint.: 8430 C. G. S.					
23°	4° 3,92'	2° 59,84'	1° 58,16'	1° 4,08'	1° 1,68'
125°	4° 2,60'	2° 58,88'	1° 57,56'	1° 3,72'	1° 1,32'
227°	4° 0,24'	2° 57,72'	1° 56,60'	1° 3,52'	1° 1,12'
298°	4° 0,68'	2° 56,60'	1° 55,64'	1° 4,08'	1° 0,96'
323°	3° 35,46'	2° 55,88'	1° 55,04'	0° 39,76'	1° 0,84'
23°	4° 4,12'	2° 59,68'	1° 58,04'	1° 4,44'	1° 1,64'
Nickelschicht IV. Feldint.: 8430 C. G. S.					
24°	3° 48,72'	2° 24,24'	1° 58,08'	1° 24,48'	1° 26,16'
120°	3° 47,40'	2° 23,28'	1° 57,36'	1° 24,12'	1° 25,92'
230°	3° 47,04'	2° 23,08'	1° 56,64'	1° 24,96'	1° 25,44'
320°	3° 30,00'	2° 20,64'	1° 55,68'	1° 9,36'	1° 24,96'
25°	3° 49,04'	2° 24,20'	1° 57,96'	1° 24,84'	1° 26,24'

Tabelle 5.

Nickel. Feldbereich B.

Galvano- meter- ausschlag	Temperatur	Drehung im Ni + Platin- glas + Deckglas	Drehung im Platinglas + Deckglas	Drehung im Ni
Nickelschicht V. Feldint.: 8420 C. G. S.				
	Zimmertemp.	4° 22,28'	3° 3,96'	1° 18,32'
779 mm	294 °	4° 18,00'	2° 59,76'	1° 18,24'
852 mm	312 °	4° 14,52'	2° 59,40'	1° 15,12'
894 mm	323 °	3° 40,80'	2° 58,68'	42,12'
914 mm	328,5°	3° 14,40'	2° 58,20'	16,20'
942 mm	335,5°	2° 57,48'	2° 57,96'	-0,48'
	Zimmertemp.	4° 21,48'	3° 3,60'	1° 17,88'
Nickelschicht VI. Feldint.: 8440 C. G. S.:				
	Zimmertemp.	4° 9,60'	3° 12,00'	57,60'
779 mm	294 °	4° 4,80'	3° 6,96'	57,84'
852 mm	312 °	3° 58,80'	3° 6,48'	52,32'
874 mm	318 °	3° 38,40'	3° 5,88'	32,52'
910 mm	327,5°	3° 16,80'	3° 5,28'	11,52'
934 mm	333,5°	3° 5,04'	3° 4,56'	-0,48'
	Zimmertemp.	4° 9,60'	3° 11,52'	58,08'
Nickelschicht VII. Feldint.: 8410 C. G. S.				
	Zimmertemp.	4° 6,0 '	2° 58,08'	1° 7,92'
828 mm	298 °	4° 3,60'	2° 55,20'	1° 8,40'
874 mm	309 °	4° 0,48'	2° 54,84'	1° 5,64'
936 mm	323,5°	3° 22,92'	2° 54,60'	28,32'
963 mm	330 °	3° 3,60'	2° 54,24'	9,36'
992 mm	336,5°	2° 54,12'	2° 53,88'	+0,24'
	Zimmertemp.	4° 5,88'	2° 57,84'	1° 8,04'
Nickelschicht VIII. Feldint.: 8440 C. G. S.				
	Zimmertemp.	3° 51,72'	3° 2,28'	49,44'
830 mm	299 °	3° 48,00'	2° 58,20'	49,80'
856 mm	305 °	3° 45,60'	2° 57,84'	47,76'
898 mm	314,5°	3° 27,62'	2° 57,36'	30,26'
946 mm	326 °	3° 3,60'	2° 57,12'	6,48'
970 mm	332 °	2° 57,24'	2° 56,88'	+0,36'
	Zimmertemp.	3° 51,84'	3° 2,52'	49,32'
Nickelschicht IX. Feldint.: 8430 C. G. S.				
	Zimmertemp.	4° 12,12'	2° 52,08'	1° 20,04'
860 mm	304 °	4° 7,92'	2° 48,12'	1° 19,80'
916 mm	317 °	4° 2,04'	2° 47,76'	1° 14,28'
948 mm	324,5°	3° 32,52'	2° 47,40'	45,12'
982 mm	332,5°	2° 52,08'	2° 47,04'	5,04'
1008 mm	338,5°	2° 46,20'	2° 46,68'	-0,48'
	Zimmertemp.	4° 12,00'	2° 51,72'	1° 20,28'

Sowohl die Platingläser wie die Deckgläser des Heizapparates weisen bei Erhöhung der Temperatur eine Abnahme der Drehung auf. Es ist dies vollkommen in Uebereinstimmung mit den Resultaten anderer Beobachter.¹⁾ Dass die Deckgläser viel mehr durch die Temperatur beeinflusst werden wie die Platingläser, dürfte durch die Verschiedenheit der Glassorten bedingt sein.

B. Nickel im Feldbereiche B.

Es wurden hier neun Nickelschichten untersucht. Die Temperaturbestimmung für die Schichten I—IV ist thermometrisch gemacht worden.²⁾ Die Resultate sind nur bis etwa 300° mitgetheilt, da es bis dahin auf eine genaue Temperaturkenntniss nicht ankommt. Für die Schichten V—IX wurde die Temperatur thermoelectrisch gemessen. In den Tab. 4 und 5 haben die einzelnen Spalten dieselbe Bedeutung wie in Tab. 3. Die Resultate oberhalb 270° sind in Fig. 18 graphisch dargestellt.

Die Zahlen zeigen auch hier übereinstimmend vollkommene Constanz der Werthe der Circularpolarisation bis zu den Temperaturen, bei denen der plötzliche Abfall eintritt. Die Art dieses Abfalles zeigen die Curven der Fig. 18. Die Abweichung, die der Verlauf der Curve Ni 8 von denen der übrigen zeigt, dürfte vielleicht darin ihren Grund haben, dass die Löthstelle der Thermokette in diesem Falle nicht fest genug an der Mittelschicht gelegen hatte. Die chemische Beschaffenheit des Nickels kann die Verschiedenheit nicht bewirkt haben, da die fünf Schichten aus demselben Bade niedergeschlagen waren.

§ 4. Discussion der Resultate.

Um aus den Ergebnissen der Versuche Schlüsse ziehen zu können, sei folgende Betrachtung vorausgeschickt. Wie Hr. du Bois³⁾ gezeigt hat, stellt für den Fall einer senkrecht

1) Vgl. Lüttge, Pogg. Ann. **137.** p. 287. 1869; Bichat, Ann. de l'école norm. **2.** p. 292. 1873.

2) Die betreffenden Beobachtungen lagen zeitlich vor den unter (A) mitgetheilten. Erst nach den damit gemachten Erfahrungen wurde zur thermoelectrischen Temperaturbestimmung geschritten.

3) du Bois, Wied. Ann. **31.** p. 952. 1887.

zu einem gleichförmigen magnetischen Felde aufgestellten, unbegrenzten Platte die Gleichung

$$(1) \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{4\pi + \frac{1}{\kappa}} \mathfrak{H}$$

die Beziehung zwischen der Transversalmagnetisierung \mathfrak{J} und der Intensität des äusseren magnetischen Feldes \mathfrak{H} dar, wobei κ die magnetische Suszeptibilität des Materials bedeutet. Hr. du Bois wies darauf hin, dass, solange κ gross ist im Vergleich zu $1/4\pi$, die der Gleichung entsprechenden Curven unmerklich wenig von einer Geraden abweichen, deren Richtungsconstante $1/4\pi$ ist; der Einfluss des Materials fällt fast ganz weg; die Gerade ist fast dieselbe für Eisen, Kobalt und Nickel. Ist die Beziehung zwischen κ und \mathfrak{J} empirisch gegeben, so kann man $\mathfrak{J} = \text{funct.}(\mathfrak{H})$ graphisch darstellen (Fig. 17).¹⁾ Man sieht, dass scharf zu unterscheiden ist zwischen dem Feldbereiche A, in dem die Magnetisierung fast genau proportional der magnetisirenden Intensität wächst, und dem Bereiche B der angenäherten magnetischen „Sättigung“.

Wenn die Magnetisierung \mathfrak{J} in dem Bereiche A unabhängig davon ist, ob die Platte aus einem Material grösserer oder geringerer magnetischer Suszeptibilität besteht, so muss sie a fortiori auch unabhängig davon sein, ob die Suszeptibilität eines gegebenen Materials nach der einen oder der anderen Seite hin nur durch Temperaturvariationen beeinflusst ist, wenigstens insofern jene Zahl immer noch gross bleibt im Vergleich zu $1/4\pi$.²⁾ Im Bereiche A ist daher bei Temperaturänderungen nach der Theorie

$$(2) \quad \mathfrak{J} = \text{const.} \quad \left(\kappa > > \frac{1}{4\pi} \right).$$

Ebenso kann nun die von mir experimentell gefundene Unabhängigkeit der Drehung ε in Eisen, Kobalt und Nickel von der Temperatur im Bereiche A durch die Gleichung

1) du Bois, Wied. Ann. **31**. p. 952. 1887; auch Phil. Mag. (5) **29**, p. 302. 1890.

2) Wir werden diese Bedingung durch das Symbol:

$$\left(\kappa > > \frac{1}{4\pi} \right)$$

veranschaulichen.

$$(3) \quad \varepsilon = \Psi \cdot (3d) = \text{const.} \quad \left(\alpha > \frac{1}{4\pi} \right)$$

dargestellt werden. Aus (2) und (3) folgt aber ohne weiteres

$$\Psi = \text{const.}^1) \quad \left(\alpha > \frac{1}{4\pi} \right).$$

In Worten:

Die Kundt'sche Constante Ψ ist innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler von der Temperatur unabhängig (wofür $\alpha > \frac{1}{4\pi}$).

Wir machen nun ferner die hiernach nicht ungerechtfertigte Annahme, dass diese Unabhängigkeit der Kundt'schen Constante von der Temperatur noch gewahrt bleibt, wenn die Susceptibilität soweit herabgedrückt wird, dass der Bedingung ($\alpha > \frac{1}{4\pi}$) nicht mehr genügt wird. Wir können dann die durch Tab. 4 und 5 (Fig. 18) gegebenen Nickelcurven, die sich auf das Feldbereich B beziehen, ohne weiteres als solche betrachten, welche die Magnetisirung als Function der Temperatur darstellen, indem wir die Ordinaten durch $\Psi \cdot d$ dividirt denken. Wir erhalten dann durch die vorliegenden Beobachtungen direct den Verlauf der thermomagnetischen Curven einer Nickelplatte im „Sättigungsbereiche“ B.

Es wäre nun von Interesse gewesen, den für Nickel erhaltenen Resultaten diejenigen der ausgedehnten vorliegenden thermomagnetischen Untersuchungen gegenüberzustellen. Indessen gestatten die letzteren einen Vergleich aus zwei Gründen nicht. Vor allem erstrecken sie sich nicht bis zu Feldern von der in vorliegender Arbeit benutzten Intensität. Sie reichen vielmehr nicht über Felder von einigen 100 C. G. S.-Einheiten hinaus. Dann ist es aber auch die Plattengestalt, die eine so principielle Verschiedenheit der beschriebenen Versuche von den ausschliesslich mit Stab- und Ringmagneten angestellten thermomagnetischen bedingt, dass ein Vergleich ohne weiteres nicht durchführbar ist.

Berlin, physikal. Inst. der Univ., 10. Januar 1892.

1) Die Dicke der Schicht d bleibt allerdings infolge der Ausdehnung des Metalls mit der Temperatur nicht absolut constant. Indessen liegen die hierdurch hervorgerufenen Aenderungen vollkommen innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler.

IV. Sichtbare Darstellung der äquipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens; von E. Lommel.

(Aus den Sitzungsberichten der math.-physik. Klasse der k. bayr. Akad. d. Wiss. vom 3. Dec. 1892, mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Es ist nicht schwer, einzusehen, dass die zu den Stromlinien einer leitenden dünnen Platte senkrechten Linien gleichen Potentials zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man daher Eisenfeilspäne

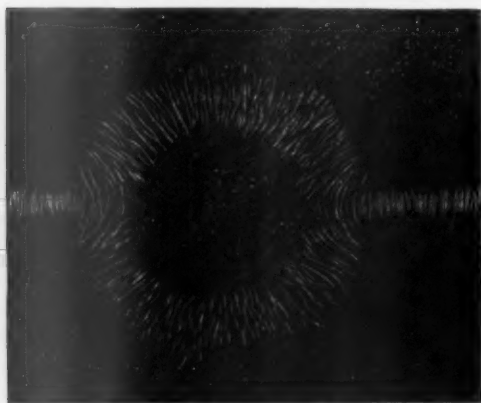


Fig. 1.

auf die Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Äquipotentiallinien.

Die benutzten Platten waren Kupferplatten von ca. $\frac{1}{2}$ mm Dicke und von verschiedenen

Formen, an deren Rand, in der Ebene der Platte liegend, die Zuleitungsdrähte angelöthet waren. Die angewendete Stromstärke betrug ca. 20 Amp. Die Feilspäne gruppieren sich immer so, wie es die Theorie für die Äquipotentiallinien verlangt; die Curven stehen namentlich stets senkrecht zu den Begrenzungslinien der Platte (die ja immer Stromlinien sind), wo sie umbiegen, um auf der Rückseite der Platte in sich zurückzulaufen. Um die Bilder festzuhalten, wurde über die Platte (bei rother Beleuchtung) photographisches Papier gebreitet und auf dieses die Eisenfeile gesiebt; die Figuren bilden sich auf dem Papier ebenso vollkommen aus, wie auf der

Platte selbst, und das Aufklappen eines Zündhölzchens genügt, um das Bild dem lichtempfindlichen Papierblatt einzuprägen. Mit Beiseitelassung der einfacheren und bekannteren Fälle seien von den zahlreichen Aufnahmen hier nur zwei minder gewöhnliche Beispiele wiedergegeben. Fig. 1 zeigt die Aequipotentialen einer ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Platte, mit Electroden an den Endpunkten eines Durchmessers des äusseren Kreises. Da die Aequipotentiallinien nur auf der Platte selbst, nicht aber auf ihrer nichtleitenden Unterlage entstehen, so geben sie zugleich ein durch jene Linien schraffirtes Bild der Platte; in derselben Weise bilden sich auch die Zuleitungsdrähte ab.

Die Figur 2 wurde erzeugt über einer rechteckigen Platte mit einem kreisrunden Loch und Electroden an zwei gegenüberliegenden Ecken; auch hier ist das Bild der Platte sammt ihren

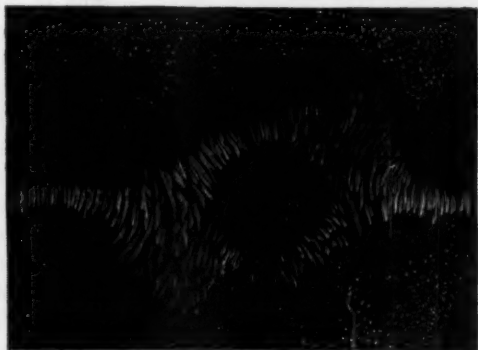


Fig. 2.

Zuleitungsdrähten deutlich zu erkennen.

Die Erkenntniss, dass die Aequipotentialen Magnetkraftlinien sind, legte den Gedanken nahe, dass die Lagenänderung der Aequipotentiallinien in einem Magnetfelde, wie sie im Hall'schen Phänomen beobachtet wird, vielleicht als eine unmittelbare Wirkung der Kraftlinien des Magnetfeldes auf die Kraftlinien der Strömung angesehen werden könne. Sind jedoch die Magnetkraftlinien zur Platte parallel, so zeigt sich das Hall'sche Phänomen bekanntlich nicht. Nähert man der durchströmten Platte in ihrer Ebene irgendwo von seitwärts einen Magnetpol, so ordnen sich die Feilspäne in Linien, welche augenscheinlich die Resultanten sind aus den beiden Systemen von Kraftlinien, deren jedes unabhängig für sich

bestehen bleibt. Von einer unmittelbaren Wirkung der Magnetkraftlinien auf die Aequipotentialen kann also nicht die Rede sein.

Das Hall'sche Phänomen wird vielmehr nur hervorgerufen durch Magnetkraftlinien, welche senkrecht zur Platte stehen, oder, bei schiefer Richtung der Kraftlinien, nur durch deren zur Platte senkrechte Componenten.

Die Art der Wirkung des Magnets auf die Platte in diesem Falle stelle ich mir vor, wie folgt. Der Primärstrom durchfließe die rechteckige Platte $abcd$ (Fig. 3) in der Richtung der Pfeile bei A und B . An den Endpunkten einer

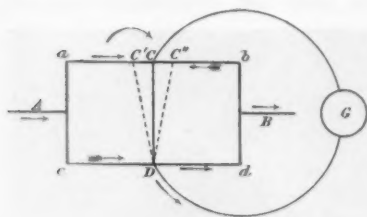


Fig. 3.

Aequipotentiallinie, bei C und D , seien die nach dem Galvanometer G führenden Drähte angelegt. Nun werde ein homogenes Magnetfeld erzeugt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Platte (zur Ebene der Zeichnung) gerichtet sind; der gebogene Pfeil be-

zeichne die Richtung der Ampère'schen Ströme des Magnets. Besteht die Platte aus einem diamagnetischen Metall, so werden in ihr nach W. Weber's Theorie des Diamagnetismus Molecularströme wachgerufen, welche den Ampère'schen Strömen des Magnets entgegengerichtet sind, und sich in bekannter Weise zu einem resultirenden Strome zusammensetzen, welcher den Rand der Platte in der Richtung der gefiederten Pfeile umfließt. Längs ab ist dieser Molecularstrom dem Primärstrom entgegengesetzt; längs cd ihm gleichgerichtet. Der Primärstrom entlang ab wird also durch die Wirkung des Magnets geschwächt, derjenige entlang cd verstärkt. Ist die Leitfähigkeit längs ab und cd die gleiche geblieben, so folgt, dass längs ab die electromotorische Kraft des Primärstromes vermindert, längs cd um ebensoviel vermehrt ist. Der Punkt D hat demnach nicht mehr wie vorher das gleiche Potential wie der Punkt C , sondern ein höheres. Verbindet man daher D mit C durch ein Galvanometer, so geht durch letzteres ein Strom in der Richtung des Pfeiles bei D , der Hall'sche Strom. Ein Punkt



Soeben ist im Verlage von **Johann Ambrosius Barth in Leipzig** erschienen:

Lehrbuch der Experimentalphysik

von

Dr. E. von Lommel

o. ö. Professor der Physik an der Universität München.

630 Seiten 8^o mit 424 Abbildungen.

Preis geheftet M. 6.40, gebunden M. 7.20.

Das „Lehrbuch der Experimentalphysik“, aus den Vorträgen des Verfassers entstanden, ist bestrebt, die Grundlehren der Physik, ohne weitläufige mathematische Entwicklungen, dem heutigen Standpunkte unserer Kenntnisse gemäss allgemein verständlich darzustellen. Unter Anknüpfung an alltägliche Erfahrungen und leicht anzustellende Versuche sind die Thatsachen überall zum Ausgangspunkte gewählt. Der (grösser gedruckte) Haupttext bildet für sich einen zusammenhängenden Lehrgang, zu dessen Verständnis, welches durch zahlreiche in den Text gefügte Abbildungen unterstützt wird, die elementarsten mathematischen Kenntnisse genügen. Der Stoff ist so angeordnet, dass niemals später Folgendes vorausgesetzt, sondern nur auf früher Besprochenes zurückverwiesen wird, wodurch dem Anfänger das Studium wesentlich erleichtert wird. Um aber auch dem Bedürfnis von Mittel- und Hochschulen gerecht zu werden, sind (kleiner gedruckte) Abschnitte eingestreut, welche die wichtigsten Entwicklungen und Beweise in möglichst knapper

bestehen bleibt. Von einer unmittelbaren Wirkung der Magnetkraftlinien auf die Aequipotentialen kann also nicht die Rede sein.

Das Hall'sche Phänomen wird vielmehr nur hervorgerufen durch Magnetkraftlinien, welche senkrecht zur Platte stehen, oder, bei schiefer Richtung der Kraftlinien, nur durch deren zur Platte senkrechte Componenten.

Die Art der Wirkung des Magnets auf die Platte in diesem Falle stelle ich mir vor, wie folgt. Der Primärstrom durchfließe die rechteckige Platte $abcd$ (Fig. 3) in der Richtung der Pfeile bei A und B . An den Endpunkten einer

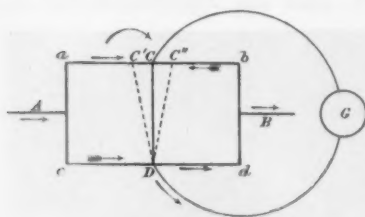


Fig. 3.

Aequipotentiallinie, bei C und D , seien die nach dem Galvanometer G führenden Drähte angelegt. Nun werde ein homogenes Magnetfeld erzeugt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Platte (zur Ebene der Zeichnung) gerichtet sind; der gebogene Pfeil be-

zeichne die Richtung der Ampère'schen Ströme des Magnets. Besteht die Platte aus einem diamagnetischen Metall, so werden in ihr nach W. Weber's Theorie des Diamagnetismus Molecularströme wachgerufen, welche den Ampère'schen Strömen des Magnets entgegengerichtet sind, und sich in bekannter Weise zu einem resultirenden Strome zusammensetzen, welcher den Rand der Platte in der Richtung der gefiederten Pfeile umfließt. Längs ab ist dieser Molecularstrom dem Primärstrom entgegengesetzt; längs cd ihm gleichgerichtet. Der Primärstrom entlang ab wird also durch die Wirkung des Magnets geschwächt, derjenige entlang cd verstärkt. Ist die Leitfähigkeit längs ab und cd die gleiche geblieben, so folgt, dass längs ab die electromotorische Kraft des Primärstromes vermindert, längs cd um ebensoviel vermehrt ist. Der Punkt D hat demnach nicht mehr wie vorher das gleiche Potential wie der Punkt C , sondern ein höheres. Verbindet man daher D mit C durch ein Galvanometer, so geht durch letzteres ein Strom in der Richtung des Pfeiles bei D , der Hall'sche Strom. Ein Punkt

t-
ie

e-
ie
ch

in
om
ch-
ier
C

em
en-
Nun
ag-
sen

zur
der
ind;

be-
nets.

rden
alar-

des
Weise

den
iesst.

egen-
tlang

der-
s *ab*

electro-
d um

nicht
, son-

ch ein
Rich-

Punkt

bestehen bleibt. Von einer unmittelbaren Wirkung der Magnetkraftlinien auf die Aequipotentialen kann also nicht die Rede sein.

Das Hall'sche Phänomen wird vielmehr nur hervorgerufen durch Magnetkraftlinien, welche senkrecht zur Platte stehen, oder, bei schiefer Richtung der Kraftlinien, nur durch deren zur Platte senkrechte Componenten.

Die Art der Wirkung des Magnets auf die Platte in diesem Falle stelle ich mir vor, wie folgt. Der Primärstrom durchfließe die rechteckige Platte $abcd$ (Fig. 3) in der Richtung der Pfeile bei A und B . An den Endpunkten einer Aequipotentiallinie, bei C und D , seien die nach dem Galvanometer G führenden Drähte angelegt. Nun werde ein homogenes Magnetfeld erregt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Platte (zur Ebene der Zeichnung) gerichtet sind; der gebogene Pfeil be-

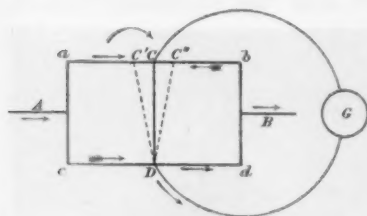


Fig. 3.

zeichne die Richtung der Ampère'schen Ströme des Magnets. Besteht die Platte aus einem diamagnetischen Metall, so werden in ihr nach W. Weber's Theorie des Diamagnetismus Molecularströme wachgerufen, welche den Ampère'schen Strömen des Magnets entgegengerichtet sind, und sich in bekannter Weise zu einem resultierenden Strome zusammensetzen, welcher den Rand der Platte in der Richtung der gefiederten Pfeile umfließt. Längs ab ist dieser Molecularstrom dem Primärstrom entgegengesetzt; längs cd ihm gleichgerichtet. Der Primärstrom entlang ab wird also durch die Wirkung des Magnets geschwächt, derjenige entlang cd verstärkt. Ist die Leitfähigkeit längs ab und cd die gleiche geblieben, so folgt, dass längs ab die electromotorische Kraft des Primärstromes vermindert, längs cd um ebensoviel vermehrt ist. Der Punkt D hat demnach nicht mehr wie vorher das gleiche Potential wie der Punkt C , sondern ein höheres. Verbindet man daher D mit C durch ein Galvanometer, so geht durch letzteres ein Strom in der Richtung des Pfeiles bei D , der Hall'sche Strom. Ein Punkt

st-
ie

re-
tte
ch

in
om
ch-
ier
C

em

en-

un

ag-

sen

zur

ler

nd;

be-

ets.

len

ar-

des

eise

len

sst.

en-

ang

ler-

a b

tro-

um

icht

son-

ein

ich-

unkt





Soeben ist im Verlage von **Johann Ambrosius Barth** in **Leipzig** erschienen:

Lehrbuch der Experimentalphysik

von

Dr. E. von Lommel

o. ö. Professor der Physik an der Universität München.

630 Seiten 8^o mit 424 Abbildungen.

Preis geheftet M. 6.40, gebunden M. 7.20.

Das „Lehrbuch der Experimentalphysik“, aus den Vorträgen des Verfassers entstanden, ist bestrebt, die Grundlehren der Physik, ohne weitläufige mathematische Entwicklungen, dem heutigen Standpunkte unserer Kenntnisse gemäss allgemein verständlich darzustellen. Unter Anknüpfung an alltägliche Erfahrungen und leicht anzustellende Versuche sind die Thatsachen überall zum Ausgangspunkte gewählt. Der (grösser gedruckte) Haupttext bildet für sich einen zusammenhängenden Lehrgang, zu dessen Verständnis, welches durch zahlreiche in den Text gefügte Abbildungen unterstützt wird, die elementarsten mathematischen Kenntnisse genügen. Der Stoff ist so angeordnet, dass niemals später Folgendes vorausgesetzt, sondern nur auf früher Besprochenes zurückverwiesen wird, wodurch dem Anfänger das Studium wesentlich erleichtert wird. Um aber auch dem Bedürfnis von Mittel- und Hochschulen gerecht zu werden, sind (kleiner gedruckte) Abschnitte eingestreut, welche die wichtigsten Entwicklungen und Beweise in möglichst knapper

elementarer Darstellung enthalten. Auch geschichtliche Daten haben gebührende Berücksichtigung gefunden, und durch ein ausführliches Namen- und Sachregister ist dafür gesorgt, dass das Werk auch als bequemes Nachschlagebuch dienen kann.

Das Buch eignet sich somit nicht nur für den Studirenden, sondern auch für Gymnasien, Realgymnasien, und Mittelschulen sowie zum Privatstudium.

Hochachtungsvoll

Leipzig, Februar 1893

Johann Ambrosius Barth

(Arthur Meiner).

An die Buchhandlung von

Ersuche um Zusendung in feste Rechnung von Expl.
zur Ansicht

Lommel, v., Experimentalphysik, geheftet M. 6,40

— — — gebunden M. 7,20

(letzteres nur gegen feste Bestellung)

Unterschrift:

n
es
ls
n
n

h

an
C
die
der
ers
an
str
so
in
jet
in
Ga
na
ist
Di

str
eb
va
du
Is
ele
ist
Gl
K

od
lin

fel
ve
pr
M
Be
än

auf ab von gleichem Potential mit D würde jetzt links von C etwa bei C' liegen müssen, und die Gerade DC' , welche diese jetzt äquipotentialen Punkte verbindet, gegen DC in der den Magnetströmen entgegengesetzten Richtung gedreht erscheinen (negative Drehung). Besteht dagegen die Platte aus einem magnetischen Metall mit präformirten Molecularströmen, welche sich mit den Magnetströmen gleichrichten, so verstärkt der resultirende Molecularstrom den Primärstrom in ab , und schwächt ihn in cd , der Hall'sche Strom geht jetzt von dem höheren Potential in C nach dem niedrigeren in D in entgegengesetzter Richtung, wie vorhin durch das Galvanometer, und die Gerade DC'' , welche man vom Punkte D nach dem jetzt mit ihm äquipotentialen Punkte C'' zieht, ist gegen DC im Sinne der Magnetströme gedreht (positive Drehung).

Wird durch diese Wirkung des Magnets auf den Primärstrom das Potential in D um den Betrag e erhöht, in C um ebensoviel erniedrigt, so ist $2e$ die Klemmenspannung der Galvanometerleitung DGC ; ist r deren Widerstand, so hat der durch das Galvanometer fließende Strom die Stärke $2e/r$. Ist ferner ε die im ganzen Stromkreis $DGCD$ wirksame electromotorische Kraft und R der Widerstand der Platte, so ist dieselbe Stromstärke auch $\varepsilon/(R+r)$, und man findet durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke die electromotorische Kraft des Hall'schen Stromes

$$\varepsilon = 2e \frac{R+r}{r},$$

oder genähert, wenn r gegen R klein ist (eine für das Gelingen des Hall'schen Versuches erforderliche Bedingung):

$$\varepsilon = 2e \frac{R}{r}.$$

Die Grösse $2e$ ist offenbar der Stärke M des Magnetfeldes proportional. Da sie ferner mit dem Primärstrom verschwindet, so setzen wir sie auch dessen Stromstärke J proportional. Wir denken uns nämlich die Wirkung jener Molecularströme als eine Art Reibung, welche für sich keine Bewegung hervorrufen, sondern nur vorhandene Bewegung ändern kann. Wir setzen demnach

$$2e = \kappa J M,$$

wo κ eine Art Reibungcoefficient vorstellt, der von der molecularen Beschaffenheit des Plattenmaterials abhängt. Der Widerstand R der Platte ist ihrem Querschnitt, als auch ihrer Dicke δ umgekehrt proportional. Fasst man alle beim Versuch unverändert bleibenden Grössen in einen constanten Factor K zusammen, so ergibt sich die electromotorische Kraft des Hall'schen Stromes:

$$\varepsilon = K \cdot \frac{JM}{r\delta};$$

dieselbe ist also direct proportional der Stärke des Primärstromes und des Magnetfeldes, umgekehrt proportional der Dicke der Platte und dem Widerstande des Galvanometers, was mit den Ergebnissen der Erfahrung in vollkommenem Einklang steht.

V.

(Z

rein
zieh
mis
nisc
The
Abc
eine
frie
von
bew
ser
frei
und
setz
halt
erri
mol
Rec
mol
den
sind
ist;
Vir
zwe
Pun

f. pl

V. Zur kinetischen Theorie mehratomiger Gase; von F. Richarz.

(Zum Theil vorgetragen in den Verhandl. der Physikal. Gesellschaft
zu Berlin, Sitzung vom 26. Juni 1891.)

I. Einleitung.

Es ist gewiss mit Recht hervorgehoben worden, dass die rein thermodynamische Betrachtungsweise, welche unter Verzicht auf jede besondere Vorstellung von der Form der thermischen Energie allein von den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie ihren Ausgang nimmt, der kinetischen Theorie an Sicherheit und an Fruchtbarkeit überlegen ist.¹⁾ Aber der Verzicht, von der Bewegung der Molecüle und Atome eine Vorstellung zu gewinnen, muss nothwendig ein unbefriedigendes Gefühl hinterlassen, und dieses wird immer wieder von neuem zu Versuchen treiben, vom Mechanismus der Wärmebewegung eine bestimmtere Anschauung auszubilden. Bei unserer gänzlichen Unkenntniss der Molecularkräfte wird man freilich heute nicht weit in diesen Versuchen gelangen können, und man hat sich davor zu hüten, auf allzu specielle Voraussetzungen, zu denen die Thatsachen keinen bestimmten Anhalt geben, ein Gebäude verwickelter Schlussfolgerungen zu errichten. Dies bezieht sich ganz besonders auf die intramolecularen Bewegungen der Atome. Dagegen wird man mit Recht die Frage behandeln dürfen, was man über die intramolecular Energie unter möglichst *einfachen* Annahmen aus den bekannten Thatsachen schliessen kann; diese Annahmen sind erstens die, dass die Wärmebewegung eine ungeordnete ist; unter dieser einzigen Voraussetzung gilt der Satz vom Virial und erweist sich als günstigen Ausgangspunkt; zweitens die Annahme, dass die Molecüle Systeme materieller Punkte, der Atome seien: man muss diese Voraussetzung als

1) M. Planck, 64. Naturforscher-Versammlung, Halle 1891. Ztschr. f. physik. Chem. 8. p. 647. 1891.

erste Annäherung an die Wirklichkeit gelten lassen¹⁾ und als die einzige, bei welcher wir gleichzeitig die mathematischen Schwierigkeiten zu überwinden im Stande sind.

Clausius hat für Bewegungen, welche in seinem Sinne „stationär“ sind, die Gleichung abgeleitet, die nach seinem Vorgange der Satz vom Virial genannt wird.²⁾ Unter stationärer Bewegung versteht Clausius eine solche, „bei der die Punkte sich nicht immer weiter von ihrer ursprünglichen Lage entfernen, und die Geschwindigkeiten sich nicht immer fort und fort in gleichem Sinne ändern, sondern bei der die Punkte sich innerhalb eines begrenzten Raumes bewegen und die Geschwindigkeiten nur innerhalb gewisser Grenzen schwanken. Es gehören dahin alle periodischen Bewegungen, wie die Bewegungen der Planeten um die Sonne und die Schwingungen elastischer Körper; ferner solche unregelmässige Bewegungen, wie man sie den Atomen und Moleculen eines Körpers zuschreibt, um seine Wärme zu erklären.“ Für Clausius haben Jacobi³⁾ und Hr. Lipschitz⁴⁾ bereits die dem Virialsatz zu Grunde liegende allgemeinere Gleichung abgeleitet; nach Clausius hat Yvon Villarceau⁵⁾ eine etwas andere Art der Beweisführung des Satzes selbst gegeben, welche in gewisser Beziehung allgemeiner ist, als die ursprüngliche von Clausius. Es sei ein System materieller Punkte von den Massen $m_1, m_2 \dots$ gegeben; ihre rechtwinkligen Coordinaten zur Zeit t seien $x_1, y_1, z_1 \dots; \varrho_1, \varrho_2 \dots$ ihre Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten; $u_1, u_2 \dots$ ihre resultirenden Geschwindigkeiten; $X_1, Y_1, Z_1 \dots$ die Componenten der auf sie wirkenden Kräfte. Die aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zunächst abzuleitende allgemeine Gleichung lautet dann:

$$(1) \quad \sum \frac{m}{2} u^2 = \frac{1}{4} \frac{d^2}{dt^2} \sum m \varrho^2 - \frac{1}{2} \sum (Xx + Yy + Zz).$$

1) Zumal durch die Hrn. Kundt und Warburg nachgewiesen ist, dass die *innere* Energie der isolirten Atome im Quecksilberdampf gegenüber der Energie der translatorischen Bewegung zu vernachlässigen ist.

2) Clausius, Sitzungsber. d. Niederrhein. Gesellsch. 27. p. 114. 1870; Pogg. Ann. 141. p. 125. 1870. Jubelbd. p. 411. 1874.

3) Jacobi, Vorles. üb. Dynamik, Suppl.-Bd. d. ges. Werke, p. 21—29.

4) Lipschitz, Crelles Journal, 66. p. 363. 1866.

5) Yvon Villarceau, Compt. rend. 75. p. 232. 1872.

Dem von Hrn. E. Budde¹⁾ und anderen neueren Autoren eingeführten Gebrauche entsprechend soll (abweichend von Clausius) der Momentanwerth $-\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz)$ das Virial des Punktsystems genannt werden. Clausius bildet die Mittelwerthe beider Seiten der obigen Gleichung für eine geeignete Zeitdauer; bei periodischen Bewegungen über eine Periode; bei unregelmässigen Bewegungen über eine Zeit, innerhalb deren sehr viele Wechsel der Bewegung stattgefunden haben. Dann folgt für solche „stationäre“ Bewegungen der Satz vom Virial:

$$(2) \quad \sum \frac{m}{2} u^2 = -\frac{1}{2} \sum (Xx + Yy + Zz).$$

Die mittlere lebendige Kraft des Systems ist gleich seinem mittleren Virial.

Besteht das System aus einer sehr grossen Anzahl von Punkten, die sich unregelmässig, aber im wesentlichen unter gleichen Umständen bewegen, so kommen alle möglichen Zustände gleichzeitig an verschiedenen Punkten vor. Es ist dann nicht nöthig, für jeden Massenpunkt den zeitlichen Mittelwerth zu nehmen, sondern die Werthe der lebendigen Kraft und des Virials können so genommen werden, wie sie der Lage und Bewegung in einem bestimmten Augenblicke entsprechen; die daraus gebildete Summe ändert ihren Gesamtwert durch die einzelnen Bewegungen nicht. Für ein solches Punktsystem ist daher

$$(3) \quad \sum \frac{m}{2} u^2 = -\frac{1}{2} \sum (Xx + Yy + Zz).$$

Die gesammte lebendige Kraft ist jederzeit gleich dem Virial. Die Betrachtungsweise von Yvon Villarceau ergibt diese Gleichung unmittelbar aus (1).

Zwei besonders wichtige Fälle für das Virial sind:

a) Die Kräfte sind Centralkräfte zwischen den Punkten des Systems. r sei die Entfernung zweier der Massenpunkte; $f(r)$ ihre gegenseitige Anziehung; dann ist das Virial:

$$-\frac{1}{2} \sum (Xx + Yy + Zz) = \frac{1}{2} \sum r f(r)$$

und also

$$(4) \quad \sum \frac{m}{2} u^2 = \frac{1}{2} \sum r f(r).$$

1) E. Budde, Allg. Mechanik, 1890 bei Riemeier p. 293. 413.

Für den speciellen Fall einer Kreisbewegung mit constanter Geschwindigkeit sagt diese Gleichung nichts anderes aus, als dass die Centrifugalkraft gleich sei der Centralkraft.

b) Das aus sehr vielen Punkten bestehende System erfülle ein Volumen v , dessen Oberfläche einen gleichförmigen Normaldruck p erleidet. Dann wird das Virial

$$-\frac{1}{2} \sum (Xx + Yy + Zz) = \frac{3}{2} p v$$

und, da die Voraussetzungen der Form (3) des Virialsatzes erfüllt sind:

$$(5) \quad \sum \frac{m}{2} u^2 = \frac{3}{2} p v.$$

Diese Gleichung kann unmittelbar angewandt werden auf ein Gas, dessen Molecüle als Massenpunkte angenommen werden, welche keine Kräfte untereinander ausüben. Wenn die Molecüle Kräfte aufeinander ausüben, deren Componenten mit X, Y, Z bezeichnet werden sollen, so tritt auf der rechten Seite von (5) noch das Virial dieser Kräfte hinzu; dieselbe lautet dann:

$$(6) \quad \sum \frac{m}{2} u^2 = -\frac{1}{2} \sum (Xx + Yy + Zz) + \frac{3}{2} p v.$$

Diese fundamentalen Entwicklungen über das Virial müssen zum Verständnisse des Folgenden vorausgeschickt werden.

II. Der Druck eines Gases, dessen Molecüle aus mehreren Atomen bestehen.

Es soll die Volumeneinheit eines Gases betrachtet werden; die gesammte lebendige Kraft der Molecularbewegung werde mit A bezeichnet. Von den Molecülen werde angenommen, dass sie aus einem System von Massenpunkten, den Atomen, bestehen; die gegenseitigen Abstände der Atome desselben Molecüls sollen mit r bezeichnet werden; $f(r)$ seien die Kräfte, welche die Atome desselben Molecüls untereinander ausüben; Anziehung positiv gerechnet. X, Y, Z seien die Componenten der Kräfte, welche die Molecüle als Ganzes untereinander ausüben; endlich stehe das Gas unter dem Drucke p . Dann gibt der Virialsatz für die Volumeneinheit:

$$(7) \quad A = \frac{1}{2} \sum r f(r) - \frac{1}{2} \sum (Xx + Yy + Zz) + \frac{3}{2} p.$$

Es werde mit A_s die gesammte lebendige Kraft der fort-

schreitenden Bewegung der Molecüle bezeichnet; mit A_i diejenige der inneren Bewegung der Atome, also diejenige der Bewegung der Atome relativ zum Schwerpunkte der Molecüle, welchen sie angehören. Dann ist

$$A = A_i + A_a.$$

Auf die innere Bewegung der Atome allein genommen lässt sich nun ebenfalls der Virialsatz anwenden; in einem gegebenen Augenblicke kommen alle möglichen Zustände der relativen Bewegung und Lage, welche die Atome eines Molecüls nacheinander annehmen, gleichzeitig bei den verschiedenen Molecülen vor. Also ist

$$A_i = \frac{1}{2} \sum r f(r)$$

und aus (7) folgt:

$$(8) \quad A_a = -\frac{1}{2} \sum (\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z) + \frac{3}{2}p.$$

Der Vergleich mit (6) zeigt, dass bei mehratomigen Gasen für die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle dieselbe Beziehung zum Drucke besteht, wie bei Gasen, deren ganze Molecüle als materielle Punkte betrachtet werden. Mittelbar können aber die Kräfte der Atome untereinander und die intramoleculare Bewegung sich in der Gleichung (8) geltend machen, insofern, als die Kräfte \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} der Molecüle untereinander, welche hauptsächlich beim Zusammenstoss der Molecüle wirksam werden, von den Kräften der Atome untereinander und deren Bewegung abhängen können.

Das von den Kräften \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} herrührende Glied in (8) ist jedenfalls sehr klein, und also auch bei mehratomigen Gasen sehr nahe

$$(9) \quad A_a = \frac{3}{2}p.$$

Die vorstehende Schlussfolgerung, welche auf der Anwendbarkeit des Virialsatzes auf die intramoleculare Bewegung beruht, ist eben deswegen ihrem inneren Sinne nach identisch mit einer von Clausius in Worten ausgesprochenen Ueberlegung.¹⁾ Clausius schliesst folgendermaassen: Wenn die Molecüle eines Gases sich bei ihrem Anprall gegen eine Wand wie elastische Kugeln verhielten, so würde durch den Stoss

1) Clausius, Mechanische Wärmetheorie, 3. p. 6 und 7.

die zur Wand senkrechte Geschwindigkeitscomponente umgekehrt. Nun bestehen aber die Molecüle aus Atomen, die ausser der Gesamtbewegung der Molecüle noch besondere Bewegungen haben. Wir haben es daher beim Anprall gegen eine Wand mit der besonderen Wirkung der vom Stosse zunächst betroffenen Bestandtheile (Atome) zu thun. Je nach den Phasen, welche die Bewegung der letzteren im Momente des Stosses haben, können sie die durch den Stoss entstehende Bewegung der ganzen Molecüle in verschiedener Weise beeinflussen. — Dieses bezieht sich aber nur auf die einzelnen Stösse. Unter der Voraussetzung, dass die verschiedenen Bewegungen in dem Gase sich einmal so ausgeglichen haben, dass die fortschreitende Bewegung durch die Bewegungen der Bestandtheile durchschnittlich nicht vermehrt oder vermindert wird, kann man annehmen, dass die Molecüle auch nach dem Abprallen von einer Wand durchschnittlich dieselbe lebendige Kraft haben, wie beim Heranfliegen, und dass unter den abgeprallten Molecülen alle von der Wand fortgehenden Richtungen ebenso vertreten sind, wie unter den heranfliegenden Molecülen die nach der Wand hingehenden Richtungen. Dann aber macht es bei der Bestimmung des Druckes keinen Unterschied mehr, wenn man statt der nur durchschnittlichen Gleichheit eine bei jedem einzelnen Stosse stattfindende Gleichheit annimmt, d. h. wenn man annimmt, dass die Molecüle nach denselben Gesetzen abprallen, wie elastische Kugeln an einer festen Wand.

III. Ueber die Abhängigkeit der Dissociation von der Temperatur.

Die Erscheinungen der Dissociation sind vom thermodynamischem Standpunkte aus erschöpfend behandelt. Die frühere Ansicht, dass alle chemischen Verbindungen bei hinreichend hoher Temperatur dissociirt würden, hat sich als irrig erwiesen. An ihrer Stelle ist der zuerst von Hrn. W. Gibbs ausgesprochene Satz getreten, dass die Dissociation, wie jede andere chemische Reaction, nur dann mit steigender Temperatur fortschreitet, wenn sie mit Wärmeverbrauch verbunden ist; ist sie dagegen mit Wärmeentwicklung verbunden, so schreitet sie bei fallender Temperatur fort. Mit anderen Worten: Die unter Wärmeentwicklung gebildeten Verbindungen

dungen sind bei niedriger Temperatur beständiger, als bei höherer; die unter Wärmebindung entstehenden Verbindungen sind bei höherer Temperatur beständiger, als bei niedriger. Jedoch gilt die Beziehung in dieser Einfachheit nur unter der Voraussetzung, dass die bei der Dissociation auftretende Wärmetönung von der Temperatur unabhängig sei. Da die zur ersteren Klasse gehörigen Verbindungen an Zahl weit überwiegen, hat man lange das Verhalten der zur zweiten Klasse gehörigen gänzlich übersehen. Als Beispiele der bei hoher Temperatur beständigen endothermischen Verbindungen finde ich angeführt das *Cyangan*¹⁾, welches in den Hochofengasen sich aus den Elementen bildet und beständig ist²⁾, dessen Bandenspectrum auch in demjenigen der Sonne vorkommen soll³⁾; sowie das *Acetylen*, welches im electrischen Lichtbogen zwischen Kohlespitzen gebildet wird und bei hoher Temperatur sich nicht zersetzt, allerdings auch nicht immer unverändert bleibt, sondern unter Umständen sich zu den aromatischen Kohlenwasserstoffen polymerisirt.⁴⁾ Hr. H. Jahn hat die Freundlichkeit gehabt, mich weiterhin noch auf das Verhalten des Selenwasserstoffes und des Tellurwasserstoffes⁵⁾, des Ozoa, Siliciumsdesquichlorid, Siliciumsubchlorid und Siliciumsubfluorid, Platinchlorür, Silberoxydul⁶⁾ aufmerksam zu machen. Die Stabilität dieser Substanzen nimmt bei steigender Temperatur zunächst ab, dann aber wieder zu; sie zeigen bei sehr hohen Temperaturen eine zum Theil grosse Stabilität. Von Selenwasserstoff⁷⁾, Tellurwasserstoff⁸⁾ und Ozon ist auch bekannt, dass sie unter Wärmebindung aus ihren Elementen resp. ge-

1) Ostwald, 64. Naturforschervers. Halle 1891; Naturw. Rdsch. 6. p. 580. 1891.

2) Michaelis, Anorgan. Chemie 2. p. 851, 854.

3) Lockyer, Liveing u. Dewar, vgl. Kayser, Spectralanal. p. 249.

4) Berthelot, Ann. chim. (4) 13. p. 143. 1868; Michaelis, Anorg. Chem. 2. p. 756. 759.

5) Ditte, Compt. rend. 74. p. 980. 1872; Ann. scientif. de l'Ecole norm. sup. (2) 1. p. 239. 1872.

6) Troost u. Hautefeuille, Compt. rend. 73. p. 443, p. 563. 1871; 74. p. 980. 1872.

7) Hautefeuille, Compt. rend. 68. p. 1554. 1868; Michaelis, Anorg. Chem. 1. p. 788.

8) Berthelot et Ch. Fabre, Compt. rend. 105. p. 92. 1887.

wöhnlichem Sauerstoff entstehen; sie fügen sich also auch dem obigen thermodynamischen Gesetze; die Zersetzung der anderen oben angeführten Verbindungen geschieht nicht einfach in die Elemente, sondern in complicirterer, zum Theil noch nicht aufgeklärter Weise; die Wärmetönungen sind unbekannt.

Für uns ist das wesentliche, dass es eine Reihe von Verbindungen gibt, welche bei höherer Temperatur stabiler sind, als bei niederer. Dieses Verhalten ist schwer vereinbar mit der üblichen Vorstellung, dass die Wärmebewegung stets die bestehenden Molecüle zu zerstören strebe. Man hält dies allgemein für selbstverständlich; das scheint mir aber nicht berechtigt. Unbewusst liegt dem wohl die Vorstellung zu Grunde, als ob die Atome durch Kräfte von der Art der elastischen Kräfte in den Molecülen zusammengehalten werden; dann wird allerdings mit steigender Temperatur, also mit zunehmender lebendiger Kraft, auch der mittlere Abstand grösser werden. Werden aber zwei Atome beispielsweise durch eine Kraft zusammengehalten, welche nach dem Newton'schen Gesetze wirkt, verhalten sie sich also ähnlich einem Doppelsternsystem, so wird umgekehrt der mittlere Abstand kleiner werden müssen, wenn die mittlere lebendige Kraft wachsen soll. Dies gibt einen Anhalt zur Vorstellbarkeit der bei höherer Temperatur grösseren Stabilität gewisser chemischer Verbindungen. Die folgenden Ueberlegungen formuliren denselben schärfer, als der Vergleich mit Doppelsternsystemen.

Der Virialsatz in der Form der Gleichung (2) kann angewandt werden auf die intramoleculare Bewegung der Atome in einem Molecül. Nennt man L_i die innere lebendige Kraft in einem Molecül, so folgt daher:

$$(10) \quad \overline{L_i} = \frac{1}{2} \sum \overline{r f(r)},$$

wo die Summe über alle Combinationen der Atome in einem Molecüle zu je zweien zu erstrecken ist. Nun wächst $\overline{L_i}$ mit steigender Temperatur, also auch $\sum \overline{r f(r)}$. Nehmen wir ein aus zwei Atomen bestehendes Molecül an, so würden wir bei gegebenem $f(r)$ zwar noch nicht die Abhängigkeit des mittleren Abstandes \overline{r} selbst, aber doch die Abhängigkeit des Mittelwerthes einer Function $\overline{r f(r)}$ von r von der Temperatur aus der Gleichung (10) kennen. Ueber die Kräfte $f(r)$ kann man

sehr wenig sicheres sagen. Jedenfalls müssen sie so beschaffen sein, dass unter ihrem Einflusse eine stabile intramoleculare Bewegung möglich ist; daraus folgt, dass die Anziehungen über die Abstossungen in einer gewissen Weise überwiegen müssen, was die Gleichung (10) durch die Nothwendigkeit eines positiven Werthes von $\sum \bar{r} f(r)$ ausspricht.

Aus dieser Gleichung — und darauf kommt es uns an — lässt sich durchaus nicht schliessen, dass der mittlere Abstand \bar{r} der Atome unter allen Umständen bei steigender Temperatur, also bei wachsendem \bar{L}_i gleichzeitig wachsen müsse.

Um wenigstens einigermaassen einen Anhalt zu bekommen, wie bei verschiedenen Gesetzen der Anziehung $f(r)$ die Abhängigkeit des Mittelwerthes \bar{r} von der Temperatur sich gestaltet, müssen wir vereinfachende und beschränkende Annahmen machen. Dabei muss es vorläufig dahingestellt bleiben, wie das Gesetz der Anziehung beschaffen sein muss, damit die Bewegung der Atome eine stabile sei, d. h. damit dieselben zusammenhaften und dauernd dasselbe Molecül bilden. Beschränken wir uns auf zweiatomige Molecüle. Statt der wirklich stattfindenden, bei verschiedenen Molecülen verschiedenen intramolecularen Bewegung denke man sich die Atome in allen Molecülen in demselben mittleren Abstände ϱ voneinander, um den Schwerpunkt ihrer Molecüle mit constanter Geschwindigkeit Kreisbahnen beschreibend. Dann wird die Gleichung (10) sich vereinfachen zu:

$$L_i = \frac{1}{2} \varrho f(\varrho),$$

welche Gleichung, wie schon bei (4) bemerkt wurde, identisch ist mit der Bedingung, dass Centrifugalkraft und Attraction gleich sind. Differenzire nach der Temperatur T , so kommt:

$$(11) \quad \frac{d L_i}{d T} = \frac{1}{2} [f(\varrho) + \varrho f'(\varrho)] \frac{d \varrho}{d T}.$$

Da nun L_i mit T wächst, so hat $d \varrho / d T$ dasselbe Vorzeichen wie $[f(\varrho) + \varrho f'(\varrho)]$. Bei mittlerem Abstände ϱ muss jedenfalls Anziehung zwischen den Atomen wirksam sein; also muss $f(\varrho)$ positiv sein; ist auch $f'(\varrho)$ positiv, so ergibt sich ohne weiteres, dass ϱ bei steigender Temperatur wächst. Eine Anziehung, welche mit der Entfernung ϱ wächst, z. B. eine elastische

Kraft, gibt also wachsendes ϱ bei Temperaturerhöhung. Von solcher Art pflegt man die Kräfte anzunehmen, welche die Atome fester Körper in ihren Gleichgewichtslagen zu halten bestrebt sind; es liegt aber kein Grund vor, dasselbe auch für die Kräfte anzunehmen, mit welchen die Atome in einem Gasmolecül einander anziehen. Vielmehr ist die Vorstellung, dass die zwischen den Atomen eines Gasmolecüls wirksamen Kräfte mit wachsender Entfernung abnehmen, sehr wohl zulässig. Dass die zwischen den Atomen wirksame Kraft bei *grosser* Entfernung derselben voneinander abnehmen muss, und zwar schneller als $1/r \log r$, dazu zwingt die Thatsache, dass zur Dissociation eine endliche, nicht aber eine unendliche Arbeit erforderlich ist.

Lassen wir die Vorstellung zu, dass die zwischen den Atomen eines Gasmolecüls thätige Anziehung mit wachsender Entfernung abnehmen könne, und zwar bei *den* Werthen des Abstandes, wie sie bei dem unzersetzten Molecül vorkommen. In der unter vereinfachenden Annahmen gültigen Gleichung (11) kann dann $f''(\varrho)$ negative Werthe annehmen; $[f(\varrho) + \varrho f'(\varrho)]$ und damit auch $d\varrho/dT$ könnte negativ werden. Es wäre also der Fall eines mit wachsender Temperatur abnehmenden Abstandes ϱ nicht ausgeschlossen.

Nun ist die Gleichung (11) nur unter vereinfachenden und beschränkenden Annahmen abgeleitet, und ϱ ist nicht der mittlere Abstand der Atome. Aber die Art der Einführung von ϱ erlaubt zu schliessen, dass der mittlere Abstand der Atome sich ähnlich verhalten kann, wie die Grösse ϱ . Die im Vorstehenden angestellten Ueberlegungen geben uns daher wenigstens einen wenn auch nur unbestimmten Anhalt für die kinetische Vorstellbarkeit eines Zusammenhaltes der Atome in dem Molecüle, welcher bei steigender Temperatur nicht zur Dissociation, sondern zu grösserer Beständigkeit einer chemischen Verbindung führen würde, welches Verhalten diejenigen Verbindungen zeigen müssen, welche unter Wärmeabsorption aus ihren Dissociationsproducten entstehen.

IV. Annahme eines einfachen Kraftgesetzes führt zu Widersprüchen.

Es soll versucht werden, zu welchen Consequenzen die denkbar einfachsten Annahmen über das Gesetz führen, nach

welchem die Atome eines zweiatomigen Gasmolecöls einander anziehen. Diese Anziehung möge proportional einer Potenz der Entfernung r angenommen werden. Wie schon erwähnt, zwingt dann die Thatsache einer *endlichen* Dissociationswärme zur Folgerung, dass die Kraft schneller abnimmt, als die Minus erste Potenz. Setzen wir also:

$$f(r) = c^2 / r^n,$$

wo $n > 1$ sein muss. Die Gleichung (10) gibt dann:

$$\overline{L}_i = \frac{c^2}{2} \cdot 1 / r^{n-1}.$$

Für die innere potentielle Energie eines Molecöls ergibt sich, wenn wir ihren Werth für $r = \infty$ zu Null annehmen:

$$\varphi(r) = - \int_r^{\infty} f(r) dr = - \frac{c^2}{n-1} \cdot \frac{1}{r^{n-1}},$$

und also ihr Mittelwerth:

$$\overline{\varphi}(r) = - \frac{c^2}{n-1} \cdot 1 / r^{n-1} = - \frac{2}{n-1} \overline{L}_i.$$

Die gesammte mittlere innere Energie des Molecöls wird:

$$\overline{E}_i = \overline{L}_i + \overline{\varphi}(r) = \frac{n-3}{n-1} \overline{L}_i,$$

woraus durch Differentiation nach der Temperatur T :

$$\frac{d}{dT} (\overline{E}_i) = \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{d}{dT} (\overline{L}_i).$$

Nun wächst sowohl \overline{E}_i als \overline{L}_i mit steigender Temperatur, mithin muss $(n-3)/(n-1)$ positiv sein; und da wir bereits $n > 1$ schliessen mussten, so folgt weiter $n > 3$.

Für Anziehungskräfte, welche einer negativen Potenz der Entfernung proportional sind, bildet aber die Minus dritte Potenz die Grenze, bis zu welcher überhaupt noch stabile Bewegung möglich ist. Es ergibt sich dies in allgemeinerer Form aus der bereits oben erwähnten Untersuchung von Hrn. Lipschitz.¹⁾ Am einfachsten gelangt man wohl auf anderem Wege zu diesem Resultate, wenn man den Satz von der lebendiger Kraft in Polarcoordinaten ausdrückt und die Winkel-

geschwindigkeit mit Hülfe des Flächensatzes eliminirt; geradlinige Bewegung in Richtung der Verbindungslinie sei ausgeschlossen; es resultirt dann eine Gleichung, die $(dr/dt)^2$ als Function von r angibt. Durch Betrachtung der Möglichkeit des Verschwindens von dr/dt lassen sich Schlüsse auf der Stabilität der Bewegung ziehen, auch für den allgemeinen Fall, dass von der auftretenden Kräftefunction nur vorausgesetzt wird, dass sie einer Anziehung entspricht. Es ergibt sich: Ist die Attraction der dritten und höheren Potenzen der Entfernung umgekehrt proportional, so entfernen sich die beiden Massenpunkte entweder schliesslich ins Unendliche voneinander, oder sie nähern sich schliesslich immer mehr und fallen nach Ablauf einer endlichen Zeit zusammen; als labiler Grenzfall kann Kreisbewegung mit constanter Geschwindigkeit vorkommen. Stabile Bewegung ist also unmöglich; mithin kann ein derartiges Gesetz nicht als zwischen den Atomen eines Molecüls wirksam angenommen werden; da andererseits die vorherigen Ueberlegungen zu dem Postulate eines solchen Gesetzes führten, so ist ersichtlich, dass überhaupt die Annahme einer Anziehung proportional einer positiven oder negativen Potenz der Entfernung r unzulässig ist. (Eine derartige Annahme ist z. B. von Pilling gemacht und ihre Consequenzen durchgerechnet worden.)²⁾

Da schon die allerersten Schlüsse aus der Annahme eines solchen einfachen Kraftgesetzes zu Widersprüchen führen, ist es nicht zu verwundern, dass man dabei auch zu Widersprüchen gelangt, wenn man aus Boltzmann's kinetischer Theorie mehratomiger Gase das Verhältniss der lebendigen Kraft der fortschreitenden zu derjenigen der inneren Bewegung eines Molecüls entnimmt, und den Exponenten n einerseits aus der Dissociationswärme von Untersalpetersäure oder Joddampf, andererseits aus dem Verhältniss der specifischen Wärmen berechnet. Hieraus hatte ich die Unmöglichkeit einer Anziehung umgekehrt proportional einer Potenz des Abstandes

1) R. Lipschitz, Crelles Journal. 66. p. 363. 1866; auch 78. p. 336. 1874.

2) Pilling, Beziehungen der Wärmecapacität der Gase zu den zwischen den Atomen wirkenden Kräften. Inauguraldissert. Jena 1876. O. E. Meyer, kinet. Gastheorie. p. 97.

der Atome bereits früher gefolgert¹⁾, ehe ich erkannt hatte, dass der Widerspruch, wie im Vorstehenden gezeigt, weit tiefer begründet ist.

V. Boltzmann's kinetische Theorie mehratomiger Gase.

Die kinetische Gastheorie Maxwell's betrachtet die Molecüle als materielle Punkte. Der Zustand derselben ist bekannt, wenn die Wahrscheinlichkeit gegeben ist, dass die Geschwindigkeit eines Molecüls in einem bestimmten Intervall liegt. Die resultirende Geschwindigkeit werde mit c bezeichnet; mit m die Masse eines Molecüls. Dann ist nach Maxwell die Wahrscheinlichkeit, dass die Componenten der Geschwindigkeit des Molecüls zwischen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ liegen, gleich

$$\sqrt{\left(\frac{hm}{2\pi}\right)^3} e^{-h\frac{m}{2}c^2} du dv dw.$$

Die Constante h ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional. Zum Verständnisse des Folgenden werde daran erinnert, dass Maxwell seinen Ausdruck dadurch ableitet, dass er den Einfluss des Zusammenstosses zweier Molecüle betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, dass das eine Molecül einem gewissen kleinen Geschwindigkeitsgebiet, und gleichzeitig das andere einem anderen solchen Gebiete angehört, darf durch den Zusammenstoss nicht geändert werden. Diese Wahrscheinlichkeit ist, wenn wir die bezüglichen Grössen für das zweite Molecül mit einem Strich bezeichnen:

$$\sqrt{\left(\frac{hm}{2\pi}\right)^3} \sqrt{\left(\frac{hm'}{2\pi}\right)^3} e^{-h\left(\frac{m}{2}c^2 + \frac{m'}{2}c'^2\right)} \int du dv dw du' dv' dw',$$

wo die Integration über die beiden kleinen Gebiete zu erstrecken ist. Die im Exponenten auftretende Summe der lebendigen Kräfte ändert sich in der That nicht durch den Zusammenstoss; Maxwell leitet die Form der Function aus dieser Bedingung ab, nachdem er nachgewiesen hat, dass das Integral durch den Zusammenstoss seinen Werth nicht ändert.

Ganz analog verfährt Hr. L. Boltzmann in seiner Abhandlung „Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehr-

1) F. Richarz, Verhandl. der physikal. Gesellsch. zu Berlin. 10. p. 73. 1891.

atomigen Gasmoleculen“.¹⁾ Er betrachtet ein Molecul als ein System von r materiellen Punkten, den Atomen, welche durch conservative Kräfte zusammengehalten werden. Die Coordinaten der Atome in Bezug auf den Schwerpunkt des Moleculs werden mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \dots \xi_r, \eta_r, \zeta_r$ bezeichnet. ξ_r, η_r, ζ_r sind dann durch die Coordinaten der $r-1$ anderen Atome bestimmt, da der Schwerpunkt Coordinatenanfangspunkt ist. Die absoluten Geschwindigkeiten der Atome, zusammengesetzt aus der relativen Bewegung gegen den Schwerpunkt und der gemeinsamen Bewegung mit demselben, seien $c_1, c_2 \dots$; ihre Componenten $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \dots$. Der Zustand des Moleculs ist dann bestimmt, wenn die Variabeln $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2 \dots \zeta_{r-1}, u_1, v_1, w_1, u_2 \dots w_r$ gegeben sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese gleichzeitig zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi_1$ bez. η_1 und $\eta_1 + d\eta_1, \dots w_r$ und $w_r + dw_r$ liegen, möge mit dW bezeichnet werden. Wenn χ die potentielle Energie der Atomkräfte, $m_1, m_2, \dots m_r$ die Massen der Atome sind, so findet Hr. Boltzmann die Wahrscheinlichkeit jenes Zustandsintervalles

$$(12) \quad dW = C e^{-h \left(\chi + \frac{m_1}{2} c_1^2 + \frac{m_2}{2} c_2^2 + \dots \right)} d\xi_1 d\eta_1 \dots dw_r.$$

Im Exponenten tritt die Gesamtenergie E des Moleculs auf. Bildet man den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molecul einem gewissen kleinen Zustandsgebiete angehört und gleichzeitig ein zweites einem anderen Gebiete, so tritt im Exponenten die Summe der Gesamtenergien beider Moleculs $E + E'$ auf, welche durch den Zusammenstoß nicht geändert wird. Die Analogie mit Maxwell's Ausdruck ist daraus ersichtlich.

Der Ausdruck für dW zeigt, dass der Zustand eines Moleculs nur von der die Temperatur bestimmenden Constante h abhängt, welche für alle in Wechselwirkung stehenden Moleculs im Zustande des Wärmegleichgewichts denselben Werth haben muss. Der Mittelwerth \bar{X} einer Function X ist

$$(13) \quad \bar{X} = \int X dW,$$

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. der Wien. Akad., math. Cl. 63. p. 417. 1871.

wo die Integration über alle möglichen Werthe der Variablen zu erstrecken ist. Die Constante C bestimmt sich aus der Bedingung, dass

$$(14) \quad \int dW = 1.$$

Enthält eine Function X nur die Geschwindigkeiten, so fällt χ heraus und der Mittelwerth \bar{X} lässt sich sofort angeben. Für die mittlere lebendige Kraft der gesammten Bewegung eines Atoms, z. B. des ersten, findet man

$$(15) \quad \frac{m_1}{2} \overline{c_1^2} = \frac{3}{2h}.$$

Die mittlere lebendige Kraft ist also für alle Atome der in Wechselwirkung stehenden Molecüle gleich; mithin kann die mittlere lebendige Kraft eines Atoms als Maass der Temperatur betrachtet werden.

Werden mit u, v, w ohne Index die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes des Molecüls bezeichnet, so ergibt sich

$$(16) \quad \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{m_1}{2} \overline{c_1^2} = \frac{m_2}{2} \overline{c_2^2} = \dots = \frac{3}{2h}.$$

Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Molecüls ist also gleich der gesammten mittleren lebendigen Kraft jedes Atoms.

Bestehen die Molecüle aus je zwei Atomen, so folgt aus (15) die gesammte mittlere lebendige Kraft eines Molecüls

$$\bar{L} = \frac{3}{h}.$$

Nach (16) ist die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Molecüls

$$\bar{L}_a = \frac{3}{2h}.$$

Die mittlere lebendige Kraft der inneren Bewegung wird also bei einem zweiatomigen Molecüle

$$\bar{L}_i = \bar{L} - \bar{L}_a = \frac{3}{2h} = \bar{L}_a.$$

Hr. Boltzmann weist l. c. darauf hin, dass bei den zweiatomigen Gasen, bei welchen das Verhältniss der specifischen Wärmen den Werth 1,4 hat, diesem Werthe entsprechend die mittlere lebendige Kraft jedes Atoms, wenn man von innerer

Arbeit absieht, nur das 0,81 fache der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Molecüls betragen würde. Nimmt man das Resultat der Theorie, dass beide Grössen gleich sind, als richtig an, so würde zu schliessen sein, dass die zwischen den Atomen eines Molecüls wirksamen Kräfte bei Temperatursteigerung positive Arbeit leisten, durch welche die lebendige Kraft der Atome in dem von der Theorie verlangten Verhältnisse erhöht wird, wie Hr. Boltzmann selbst in einer früheren Arbeit entwickelte.¹⁾ Da nun die Kräfte, welche die Atome zusammenhalten, anziehende sein müssen, werden wir hier zum zweitenmale darauf hingeführt, die Möglichkeit einer Annäherung der Atome bei Erhöhung der Temperatur ins Auge zu fassen.

Da aus der Vernachlässigung der inneren Arbeit der intramolecularen Kräfte von namhafter Seite ein Einwand gegen Boltzmann's Theorie entnommen wurde²⁾, schien es mir wünschenswerth, auf die Nothwendigkeit ihrer Berücksichtigung noch einmal hinzuweisen.

Was nun das Verhältniss der Voraussetzungen von Hrn. Boltzmann zur Wirklichkeit betrifft, so kann man wohl bei zweiatomigen Molecülen die Vorstellung der Atome als frei beweglicher Punkte als annähernd erfüllt annehmen. Bei drei- und mehratomigen Molecülen treten aber besondere Schwierigkeiten auf. Die Chemie verlangt für die Atome in einem Molecüle eine ganz bestimmte Anordnung, durch welche die Constitution gegeben ist. Z. B. muss in einem Kohlensäuremolecüle stets das Kohlenstoffatom sich zwischen den beiden Sauerstoffatomen befinden. Dem vermag die freie Beweglichkeit der punktförmigen Atome in Boltzmann's Theorie nicht Rechnung zu tragen. Bei zweiatomigen Molecülen fällt dieses Bedenken weg.

VI. Bedingungen der Stabilität der Molecüle.

In der Theorie von Hrn. Boltzmann ist nicht die Voraussetzung enthalten, dass die zwischen den Atomen eines Molecüls wirkenden Kräfte ein dauerndes Zusammenhaften derselben bewirken; seine Theorie gilt auch, wenn dies nicht der Fall ist.

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. der Wien. Akad., math. Cl. 56. p. 682. 1867.

2) O. E. Meyer, Kinet. Gastheorie. p. 95.

Die Bedingungen der Stabilität der Molecüle lassen sich aus dem Ausdrucke (12) ableiten. Es lässt sich von vornherein sagen, dass dieselben weitergehende sein müssen, als die Bedingungen der Stabilität der Bewegung eines Systems freier Massenpunkte; denn durch die Zusammenstöße kann eine ursprünglich stabile innere Bewegung eines Molecüls in eine instabile verwandelt werden. Wir müssen uns dabei auf Molecüle, welche aus zwei Atomen bestehen, beschränken.

Aus der Boltzmann'schen Wahrscheinlichkeit eines Zustandsintervalles (Gleichung (12)) ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die auf den Schwerpunkt des Molecüls bezogenen Coordinaten der Atome zwischen $\xi_1, \eta_1 \dots \zeta_{r-1}$ und $\xi_1 + d\xi_1, \eta_1 + d\eta_1 \dots \zeta_{r-1} + d\zeta_{r-1}$ liegen, während gleichzeitig die Geschwindigkeiten $c_1, c_2 \dots c_r$ alle möglichen Werthe annehmen, zu:

$$dW' = C e^{-h\chi} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1} \int e^{-h\left(\frac{m_1}{2} c_1^2 + \dots\right)} du_1 \dots dw_r.$$

Aus (14) folgt:

$$1 = C \int e^{-h\chi} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1} \int e^{-h\left(\frac{m_1}{2} c_1^2 + \dots\right)} du_1 \dots dw_r.$$

Mithin:

$$dW' = \frac{e^{-h\chi} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1}}{\int e^{-h\chi} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\zeta_{r-1}},$$

wo die Integration über alle möglichen Werthe der unabhängigen Coordinaten auszudehnen ist. Ist die Zahl der Atome $r=2$, so folgt

$$dW' = \frac{e^{-h\chi} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}{\int e^{-h\chi} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}.$$

Der Abstand des Atoms 1 vom Anfangspunkt (= Schwerpunkt) werde ϱ genannt; χ sei nur vom Abstand r der beiden Atome (oder also auch nur von ϱ) abhängig. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand vom Anfangspunkt zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liege, ergibt sich dann aus dW' durch Integration über eine Kugelschale, und wird

$$dW_\varrho = \frac{e^{-h\chi} \varrho^2 d\varrho}{\int e^{-h\chi} \varrho^2 d\varrho}.$$

Da nun r ein constantes Vielfaches von ρ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand der Atome zwischen r und $r + dr$ liege:

$$(17) \quad dW_r = \frac{e^{-h\chi} r^2 dr}{R \int_0^R e^{-h\chi} r^2 dr},$$

wo R einen grossen Werth von r bedeutet, über welchen hinaus die Atome nicht mehr zu einem Molecüle verbunden sind. Es fragt sich, welche Eigenschaften dieser Ausdruck haben muss, wenn mittlere Werthe von r die wahrscheinlichsten, grosse Werthe von r gegen R hin und kleine Werthe von r gegen Null hin sehr selten sein sollen.

Der Nenner von (17) sei endlich und von Null verschieden (Annahme α). Dann muss das Integral des Zählers von (17) genommen über ein Intervall von r , welches sehr selten sein soll, sehr klein sein (gegen den Nenner); bezeichnen wir einen solchen Werth mit ε .

Es sei R' ein grosser Werth von r , aber kleiner als R . Sollen grosse Werthe von r sehr selten sein, so muss für grosse r sein:

$$(18) \quad \int_{R'}^R e^{-h\chi} r^2 dr = \varepsilon.$$

Es sei δ ein kleiner Werth von r . Sollen kleine Werthe von r sehr selten sein, so muss sein:

$$(19) \quad \int_0^\delta e^{-h\chi} r^2 dr = \varepsilon.$$

Sollen mittlere Werthe von r häufig gegenüber kleinen und grossen sein, so muss

$$(20) \quad \text{für mittlere } r: \begin{cases} \int e^{-h\chi} r^2 dr \text{ gross gegen } \varepsilon, \text{ oder} \\ e^{-h\chi} r^2 \text{ endlich von Null verschieden sein.} \end{cases}$$

Die potentielle Energie χ muss so beschaffen sein, dass diesen Bedingungen genügt wird. χ enthält eine willkürliche Constante A ; wir werden sogleich sehen, dass die Annahme (α), welche willkürlich ist und nur den Zweck der übersichtlichsten

Festlegung der Grössenordnungen für (18), (19), (20) hat, über die Constante A zugleich in gewisser Weise verfügt. Wir setzen:

$$(21) \quad \chi = A - U.$$

Dann ist U die Kräftefunction, deren *positiv* genommene partielle Differentialquotienten die Kraftcomponenten sind. Bei Abständen der Atome voneinander, welche gleich oder grösser sind, als deren mittlere Entfernung, muss zwischen denselben eine Anziehung wirksam sein; bei überaus grosser Entfernung r der beiden Atome muss dieselbe verschwinden. Ferner ist die Dissociationsarbeit endlich. Setzen wir daher fest, dass $U=0$ für sehr grosse r , so muss für endliche r des definirten Entfernungsgebietes U endlich positiv sein und bei wachsendem r abnehmen.

Ein Theil der Annahme (α) ist, dass derjenige Theil des Nenners von (17), welcher sich auf grosse Werthe von r bezieht, nicht unendlich werde. Dies ist zugleich mit der Gleichung (18) erfüllt. Das Integral in dieser Gleichung gibt aber noch sehr Grosses, wenn $e^{-h\chi r^2}$ für grosse r abnimmt wie $1/r \log r$; es muss also schneller abnehmen, oder es muss sein:

$$(22) \quad e^{-h\chi R^3} \log R = 0.$$

Da U für grosse r verschwindet, wird in (22) $\chi = A$; es muss also hiernach $A \cdot h$ gross positiv sein in der durch (22) vorgeschriebenen Weise.

Ein weiterer Theil der Annahme (α) ist, dass der von von kleinen Werthen von r herrührende Theil des Nenners von (17) nicht unendlich werde.¹⁾ Dies ist zugleich mit der Gleichung (19) erfüllt, welche wiederum verlangt, dass $e^{-h\chi r^2}$, wenn es überhaupt für verschwindendes r sehr gross wird, langsamer wachse als $1/r \log r$; dass also:

$$(23) \quad \left[e^{-h\chi r^3} \log r \right]_{r=0} = 0.$$

Es darf also $-h\chi = -hA + hU$, wenn es für $r=0$ überhaupt unendlich grosse positive Werthe annimmt, höchstens in

1) In diesem Punkte verdanke ich Hrn. Boltzmann eine wesentliche Verschärfung der Beweisführung.

der durch (23) vorgeschriebenen Weise logarithmisch unendlich werden, was nur dadurch geschehen könnte, dass U logarithmisch unendlich würde. Dies ist eine Bedingung für das Verhalten der zwischen den Atomen wirksamen Kräfte bei verschwindendem Abstände.

Nun hat U für mittlere Werthe von r einen endlichen positiven Werth. Geht man von solchen zu verschwindenden Werthen von r über, so ist die Vorstellung die plausibelste, dass man der räumlichen Ausdehnung und Undurchdringlichkeit der Atome dadurch Rechnung zu tragen hat, dass man unterhalb eines gewissen kleinen Werthes von r Abstoßung annehmen muss. Dann ist ein Unendlichwerden von U für $r = 0$ ausgeschlossen. Der Allgemeinheit halber soll aber auch die Annahme einer Anziehung bis zu verschwindendem r zugelassen werden. Dann wächst U bei abnehmendem r bis zu $r = 0$. Bleibt es aber auch noch für $r = 0$ endlich, so steht dem von seiten der Gleichung (23) nichts entgegen.

Wenn U für $r = 0$ endlich bleibt, so bleiben auch die Geschwindigkeiten endlich, wie aus dem Satze der lebendigen Kraft unmittelbar folgt. Wächst aber U bei verschwindendem r über jede Grenze, so werden auch die Geschwindigkeiten für $r = 0$ unendlich und schon die Stabilität eines Molecüls würde den Ausschluss von $r = 0$ verlangen. Für diesen Ausschluss kommt es nun auf das Maass an, in welchem U bei verschwindendem r unendlich wird, und man kann, ganz abgesehen davon, wie U sich für endliche r verhält, die bezüglichen Schlüsse, welche Hr. Lipschitz bei den Stabilitätsbetrachtungen l. c. zieht, unmittelbar anwenden. Wird U ebenso schnell oder schneller unendlich, als die Minus zweite Potenz von r , so führt grosse Annäherung der Atome stets zum Zusammensturz derselben. Wird U unendlich wie eine Potenz zwischen 0 und -2 , diese selbst ausgeschlossen, so tritt ein Zusammenstürzen dann, und nur dann ein, wenn die Summe der Flächengeschwindigkeiten gleich Null ist, oder bei nur zwei Atomen, wenn dieselben sich geradlinig aufeinander zu bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Bewegungsrichtung vorhanden ist, ist nun zwar verschwindend gegen die Wahrscheinlichkeit anderer Richtung; aber andererseits ist ein Zusammenstürzen der Atome mit unendlicher Geschwindigkeit

als mechanisch undenkbar *absolut* auszuschliessen. Die Gleichung (23) zeigt nun, dass von diesen bedenklichen Fällen, in welchen U unendlich werden kann, nur die erste Schwelle des logarithmisch Unendlichwerdens erlaubt ist, wenn nicht ein Zusammenfallen der beiden Atome in einen Punkt an Wahrscheinlichkeit gegenüber allen anderen Entfernungen überwiegen soll.

Die Bedingungen für χ , unter welchen die Gleichungen (18) und (19) erfüllt sind, sind hiermit festgestellt und erläutert; bei ihrer Befriedigung werden die von grossen und kleinen Werthen von r herrührenden Theile des Nenners der Gleichung (17) nicht sehr gross, sondern verschwinden vielmehr. Da für endliche, von Null verschiedene, Werthe von r sowohl r als χ endlich sind, kann a limine kein anderer Theil des Nenners von (17), als die durch (18) und (19) gegebenen unendlich werden. Es bleibt also von der Annahme (α) nur noch zu erfüllen, dass der Nenner endlich von Null verschieden sein soll. Dies ist der Fall, wenn die Bedingung (20) erfüllt ist, welche verlangt, dass $-h\chi$ für mittlere Werthe von r endlich von Null verschieden sei. Wegen $-h\chi = -hA + hU$, und wegen hA gross positiv, muss daher hU für mittlere Werthe von r grosse positive Werthe annehmen. Dieses Resultat hat eine einfache physikalische Bedeutung.

Wenn hU für mittlere, also für die häufigsten Werthe von r grosse positive Werthe annimmt, so ist dasselbe für $h\bar{U}$ der Fall, wo der Mittelwerth entweder in *einem* Moment über alle Molecüle zu nehmen ist, oder — und diese Auffassung wollen wir festhalten — bei *einem* Molecül über eine grosse Zeit, während deren viele Zusammenstösse stattgefunden haben. Wir bezeichnen, wie früher, mit L_i die lebendige Kraft der inneren Bewegung relativ zum Schwerpunkte für beide Atome eines Molecüls zusammengenommen. Dann ist, wie auf p. 482 abgeleitet wurde:

$$\bar{L}_i = \frac{3}{2h}.$$

Wenn also $h\bar{U}$ gross positiv sein soll, so folgt auch \bar{U}/\bar{L}_i gross positiv, oder \bar{U} gross gegen \bar{L}_i . Bei gegebener lebendiger Kraft ist für die Atome die Gelegenheit zu möglichst weitem Auseinanderfahren am günstigsten, wenn sie sich geradlinig voneinander entfernen. Sie entfernen sich dann soweit von-

einander, bis die Arbeit, welche sie dabei gegen ihre Anziehung leisten, gleich geworden ist der ursprünglichen lebendigen Kraft; dann kehren sie um. Nun ist U gleich (dem absoluten Werthe nach) der Arbeit, welche bei der Trennung bis zu unendlicher Entfernung zu leisten ist. Die Bedingung: \bar{U} gross gegen \bar{L}_i kann man daher in Worten folgendermaassen ausdrücken. Wenn sich die Atome von einem mittleren Abstände an geradlinig voneinander entfernen und dabei die anfängliche lebendige Kraft gleich ist dem Mittelwerthe \bar{L}_i , so leisten die Atome bis zum Momente der Umkehr eine Arbeit gegen ihre Anziehung, welche klein ist gegen die gesammte Arbeit bei Trennung bis zu unendlicher Entfernung. Da nun die Anziehung bei wachsendem Abstände schnell abnimmt und bei grossen Abständen verschwindet, so ist jene Bedingung identisch damit, dass die Atome bei der definirten Bewegung nur einen Maximalabstand erreichen, welcher nicht gross ist gegen den mittleren Abstand. A fortiori ist dies der Fall, wenn die angenommene Bewegungsrichtung weitem Auseinanderfahren weniger günstig ist, als die geradlinige Entfernung.

Hiermit sind die Eigenschaften festgestellt, welche χ haben muss, damit mittlere Werthe des Abstandes der Atome die wahrscheinlichsten, sehr grosse Abstände und Zusammenfallen in einen Punkt ausgeschlossen seien. In Bezug auf die übrigen Kriterien der Stabilität der Bewegung eines sich selbst überlassenen Systems, wie sie Hr. Lipschitz l. c. aufstellt, ist für unseren Fall, wo es sich um sehr viele in Wechselwirkung tretende Systeme handelt, Folgendes zu bemerken. Es darf irgend welche relativen Lagen geben, in welchen die Atome dauernd in Ruhe bleiben könnten; die Zusammenstösse der Molecüle vertreiben sie dann doch wieder aus diesen Lagen. Dass die „angehäufte lebendige Kraft“ mit wachsender Zeit über jede Grenze hinaus wachse¹⁾, ist in den Grundvorstellungen der kinetischen Gastheorie bereits erfüllt, dass nämlich alle möglichen Bewegungsphasen in stetem Wechsel vorkommen und sich wiederholen. Dass Boltzmann's Theorie diese Bedingung erfüllt, ist durch die Ableitung der Mittelwerthe der lebendigen Kraft (Gleichung (15), (16)) verificirt.

1) R. Lipschitz, Crelles Journ. 78. p. 335, 336. 1874.

VII. Ableitung des Virialsatzes aus Boltzmann's Theorie und Vergleich einer Consequenz mit der Erfahrung.

Für stabile Bewegungen gilt der Satz vom Virial. Aus dem Boltzmann'schen Ausdruck (12) für die Wahrscheinlichkeit eines Zustandsintervalles muss man also durch Anwendung auf die innere Bewegung eines zweiatomigen Molecüls den Satz vom Virial ableiten können, unter der Voraussetzung, dass die soeben abgeleiteten Bedingungen für die Stabilität der Molecüle erfüllt sind.

Der Virialsatz bezieht sich auf den Mittelwerth von $rf(r)$, wo r wie immer der Abstand der Atome ist, $f(r)$ die Kraft, welche sie aufeinander ausüben, und zwar Anziehung positiv gerechnet. Zuzufolge letzterer Festsetzung des Vorzeichens ist

$$f(r) = \frac{d\chi}{dr}.$$

Für den gesuchten Mittelwerth gibt die Boltzmann'sche Theorie mit Hülfe der Gleichung (17)

$$\overline{rf(r)} = \frac{\int_0^R r^3 \frac{d\chi}{dr} e^{-h\chi} dr}{\int_0^R e^{-h\chi} r^3 dr}$$

Nun ist durch partielle Integration

$$\int r^3 e^{-h\chi} \frac{d\chi}{dr} dr = -\frac{1}{h} \cdot e^{-h\chi} r^3 + \frac{3}{h} \int e^{-h\chi} r^2 dr.$$

Also

$$(24) \quad \overline{rf(r)} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\left[e^{-h\chi} r^3 \right]_0^R}{\int_0^R e^{-h\chi} r^3 dr} + \frac{3}{h}$$

Wenn nun die Molecüle stabil sein sollen, müssen die Gleichungen (22) und (23) erfüllt sein. Aus diesen folgt a fortiori, dass $e^{-h\chi} r^3$ sowohl für $r = R$, als auch für $r = 0$ verschwindet. Da nun ferner bei Stabilität wegen (20)

$$\int_0^R e^{-h z} r^2 dr > 0$$

ist, so folgt, dass alsdann das erste Glied der rechten Seite von (24) gleich Null wird.

Für den Mittelwerth der lebendigen Kraft der inneren Bewegung relativ zum Schwerpunkte ergaben die Gleichungen (15) und (16) bei zweiatomigen Moleculen

$$\bar{L}_i = \frac{3}{2h}.$$

Mithin gibt die Gleichung (24) bei stabiler Bewegung

$$\bar{L}_i = \frac{1}{2} r f(r)$$

den Virialsatz in der Form der Gleichung (10).

Nachdem die Bedingungen der Stabilität der Moleculé festgestellt sind, und nachdem gezeigt ist, dass bei Erfüllung dieser Bedingungen der Virialsatz in der Boltzmann'schen Theorie enthalten ist, lässt sich *eine* der Bedingungen der Stabilität mit Hülfe der abgeleiteten Beziehungen an der Wirklichkeit prüfen, wie im Folgenden geschehen soll.

Aus der Bedingung (20) wurde auf p. 487 geschlossen, dass $h \bar{U}$ grosse positive Werthe haben müsse. Nun ist $h = 3/2 \bar{L}_i$; also folgt:

$$(25) \quad 3 \bar{U} / 2 \bar{L}_i$$

muss bei stabilen Moleculen grosse Werthe haben. Multipliziert man Zähler und Nenner des vorstehenden Quotienten mit N , der Zahl der Moleculé in der Volumeneinheit, so tritt im Zähler $N \bar{U}$ auf. Dies ist die Arbeit, welche die zwischen den Atomen wirksamen Anziehungen leisten, wenn alle Paare von Atomen in der Volumeneinheit aus unendlicher Entfernung sich bis auf *die* mittlere Entfernung einander nähern, welche sie in der Verbindung zu Moleculen haben. Diese Arbeit ist gleich der Wärmemenge, welche der Volumeneinheit zugeführt werden muss um alle Moleculé zu dissociiren, oder die zur Dissociation der Volumeneinheit erforderliche Wärmemenge, welche mit w bezeichnet werden soll. — Im Nenner von (25)

tritt $N\bar{L}_i$ auf; für zweiatomige Moleküle ist, wie aus den Gleichungen (15) und (16) geschlossen wurde, $\bar{L}_i = L_a$; also $N\bar{L}_i$ gleich dem A_a der Gleichung (9) und mithin

$$N\bar{L}_i = \frac{3}{2}p.$$

Daraus, dass der Quotient (25) für stabile Moleküle grosse Werthe haben muss, folgt daher, dass die auf die Volumeneinheit bezogene Dissociationswärme w gross sein muss gegen p .

Bezüglich der Dissociationswärme liegen nun folgende experimentelle Daten vor. Die Untersalpetersäure N_2O_4 dissociirt sich zu $2 \times NO_2$; die Dissociation beginnt bei gewöhnlicher Temperatur und ist bei etwa 150° vollendet. Diese Dissociation ist für uns ganz analog derjenigen eines zweiatomigen Gasmoleküls; denn die Gruppe NO_2 bleibt bei derselben ungespalten und spielt die Rolle eines Atomes. Berthelot und Ogier¹⁾ fanden, dass für die Dissociation von 1 g Untersalpetersäuredampf etwa 144 Grammcalthorien erforderlich sind. Daraus ergibt sich für die Dissociation von 1 ccm (bei 0° und Atmosphärendruck) die oben mit w bezeichnete Wärmemenge:

$$w = 25 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Weiterhin hat nun Hr. Boltzmann eine Theorie der Dissociation entwickelt, vermöge deren der Wärmeverbrauch bei derselben berechnet werden kann, wenn die Abhängigkeit des Dissociationsgrades von Temperatur und Druck bekannt ist.²⁾ Ueber diese liegen für Untersalpetersäure Messungen von Deville und Troost vor³⁾, aus welchen Boltzmann einen Werth⁴⁾ für die Dissociationswärme berechnet, welcher mit dem obigen von Berthelot und Ogier gut übereinstimmt. Dieselbe Theorie wendet Hr. Boltzmann dann auch auf die Beobachtungen von Fr. Meier und J. M. Crafts⁴⁾ über die zwischen 600° und 1400° sich vollziehende Dissociation des Joddampfes an und findet, dass zur Dissociation eines Grammes Joddampf J_2 in einzelne Atome 112,5 Grammcalthorien

1) Berthelot u. Ogier, Ann. d. chim. et d. phys. (5) **30**, p. 382. 1883. Ostwald, Allgem. Chemie **2**, p. 97.

2) Boltzmann, Wied. Ann. **22**, p. 39. 1884.

3) Deville u. Troost, Compt. rend. **64**, p. 237. 1867.

4) Meier u. Crafts, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. **13**, p. 851. 1880.

erforderlich sind. Daraus ergibt sich für Jod, bezogen auf die in 1 ccm bei 0° und 76 cm vorhandene Masse:

$$w = 54 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Endlich hat Hr. E. Wiedemann aus Messungen der Wärmemenge, welche zur Ueberführung des Banden- in das Linienspectrum nöthig ist, gefunden, dass einem Gramm Wasserstoffgas von gewöhnlicher Temperatur zur Zerlegung in seine Atome etwa 128 000 Grammcalthorien zugeführt werden müssen.¹⁾ Daraus ergibt sich für 1 ccm (bei 0° und Atmosphärendruck) berechnet

$$w = 483 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Dissociation des Wasserstoffs durch blosse Temperaturerhöhung findet, wenn überhaupt, jedenfalls erst bei sehr hohen Temperaturen statt.

Diese Werthe von w sollen nun bei stabilen Molecülen gross sein gegen p . Bei 0° und 76 cm Barometerstand ist

$$p = 1,01 \cdot 10^6 \text{ Dynen pro cm}^2,$$

w ist also in der That stets erheblich grösser als p ; und umsomehr, je weiter das betreffende Gas bei 0° von der Dissociationstemperatur entfernt ist, d. h. je stabiler es ist. Dass die vorkommenden Verhältnisse von w zu p im Sinne der theoretischen Erörterungen über die Stabilität der Molecüle auch geradezu als gross zu bezeichnen sind, ist daraus ersichtlich, dass dieses Verhältniss in jenen Erörterungen als Exponent von e auftritt, dass also Zahlenwerthe, welche die Einheit erheblich übertreffen, schon dann als gross zu bezeichnen sind, welche, wenn sie nicht in Exponentialfunctionen auftreten würden, noch nicht als gross gelten könnten.

Berlin, im Januar 1893.

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 253. 1880; 18. p. 509. 1883. Ostwald, Allgem. Chemie 2. p. 49.

**VI. Bolometrische Untersuchungen über die
Stärke der Strahlung verdünnter Gase unter dem
Einflusse der electrischen Entladung;
von Knut Ångström.**

(Von dem Hrn. Verfasser abgekürzt mitgetheilt aus „Acta Reg. Soc.
Upsaliensis“ 1892.)

(Hierzu Taf. V Fig. 1–12.)

I. Einleitung.

In vorliegender Abhandlung will ich die Versuche, welche ich über die Strahlung verdünnter Gase unter dem Einflusse der electrischen Entladung angestellt habe, näher besprechen.¹⁾ Die ganz besonderen Schwierigkeiten, mit denen diese Untersuchung verbunden ist, tragen die Schuld daran, dass man hinsichtlich der Schärfe und Genauigkeit der Bestimmungen nicht zu grosse Forderungen stellen kann, und aus demselben Grunde lässt auch die Anzahl der Versuche viel zu wünschen übrig. Die hier gemessene Strahlung ist nämlich von einer so geringen Stärke; dass sogar ein so empfindliches Instrument, wie das Bolometer, sich in einigen Fällen als unzureichend erwiesen hat. Es ist übrigens eine sehr bekannte Sache, dass die Herstellung von verdünnten Gasen von solcher Reinheit, dass dieselben sich bei durchgehenden electrischen Entladungen von Verunreinigungen frei zeigen, eine der allerschwierigsten Aufgaben des Chemikers und Physikers ist. Der Werth einer Untersuchung über die electrischen und optischen Phänomene in verdünnten Gasen scheint mir jedoch von der sorgfältigen Herstellung der Gase in hohem Grade abhängig zu sein. Demzufolge habe ich keine Mühe gescheut, um dieselben so rein wie möglich zu bekommen, eine Arbeit die viel Zeit in Anspruch genommen hat. Wenn auch infolgedessen diese Untersuchung eigentlich als eine orientirende zu betrachten

1) In einer vorläufigen Notiz: „L'intensité de la radiation des gaz sous l'influence de la décharge électrique“ (Öfversigt af K. Vet. Akad. Förh. p. 373, 1891) habe ich die Hauptresultate der Untersuchung mitgetheilt.

ist, so werden doch die Versuche als die ersten ihrer Art gewiss nicht ohne Bedeutung für die nähere Kenntniss der Entladungsphänome in verdünnten Gasen sein und uns hoffen lassen, dass ein eingehendes Studium einzelner Fragen mittels der bolometrischen Methode unsere Kenntniss in dieser Hinsicht noch weiter fördern werde.

Directe Versuche, die Strahlung der Gase in sogenannten Geissler'schen Röhren quantitativ zu messen, liegen, so viel ich weiss, nicht vor. Dagegen ist die Wärmeentwicklung in solchen Röhren mehrmals Gegenstand der Untersuchungen gewesen. So haben die Hrn. G. Wiedemann¹⁾, Naccari und Bellati²⁾, E. Wiedemann³⁾ und Hasselberg⁴⁾ solche Versuche angestellt. In der letzten Zeit hat schliesslich Hr. G. Staub⁵⁾ das Bunsen'sche Eiscalorimeter zu diesem Zwecke benutzt. Seine Versuche unterscheiden sich von den übrigen dadurch, dass er die Lichtstrahlung von der Gesamterwärmung zu trennen sucht. Das Entladungsrohr wurde nämlich theils ganz durchsichtig in das ebenfalls durchsichtige Eiscalorimeter eingeführt und die Erwärmung bei Entladung 2—3 Leydener Flaschen bestimmt, theils wurde der Versuch, nachdem das Geissler'sche Rohr durch einen in Wasser unlöslichen Lack undurchsichtig gemacht war, wiederholt. Diese Versuche zeigen, dass ein sehr bedeutender Theil der Wärmeentwicklung in sichtbarer Strahlung besteht, indem 20—30 Proc. von der Gesamterwärmung den Calorimeter verlässt, wenn das Rohr ungeschwärzt ist.

Die vorliegende Untersuchung verfolgt jedoch einen andern Zweck. Die Erwärmung, welche man bei diesen calorimetrischen Untersuchungen beobachtet, ist nämlich eine Folge sowohl der Strahlung der Gase und der Wärmeüberführung von denselben durch Convection und Leitung wie auch der wahrscheinlichen Wärmeentwicklung an den Rohrwänden.

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **158**. p. 35 u. p. 252. 1876.

2) Naccari et Bellati (Atti dell Ist. Ven. **4**. 1878) Beibl. **2**. p. 720. 1878.

3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6**. p. 298. 1879 u. **10**. p. 202. 1880.

4) B. Hasselberg, Mém. de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg **27**. Nr. 1. 1879.

5) G. Staub, Inaugural-Dissertation, Zürich 1890.

In dem Folgenden werden wir ausschliesslich die *Strahlung* der Gase bestimmen und zwar nur die *Strahlung des positiven Lichtes*. Wir wollen die Beziehung zwischen Stromstärke und Strahlung näher untersuchen, die Veränderungen, welchen diese Strahlung in quantitativer und qualitativer Hinsicht bei Aenderungen in Stromstärke und Druck unterliegt, und schliesslich die Strahlung in Gramm-Calorien pro Secunde für die Längeneinheit des Entladungsrohres berechnen. Mit Kenntniss der Stromstärke und der Potentialdifferenzen in dem Entladungsrohre wird es dann möglich, den Theil der in dem Rohre abgegebenen Energie, welche in Strahlung umgesetzt wird, zu berechnen.

In dieser Untersuchung wird angenommen:

1. Dass die absorbirende Fläche des Bolometers alle Strahlen ebenso gut absorbirt, oder also, dass das Absorptionsvermögen der Fläche von der Wellenlänge unabhängig ist. Zwar habe ich schon gezeigt¹⁾, dass Russ um so durchlässiger ist, je grösser die Wellenlänge; da aber aus derselben Untersuchung hervorgeht, dass das Absorptionsvermögen dennoch für jede Wellenlänge sehr gross und das Diffusionsvermögen bekanntlich sehr unbedeutend ist²⁾, mag diese Annahme berechtigt sein.

2. Dass das Absorptionsvermögen der Fläche gleich *eins* gesetzt werden kann. Diese Annahme ist, wie bekannt, nicht vollständig richtig und verursacht einen constanten Fehler in den absoluten Bestimmungen von 1—2 Proc. Da ich aber das Absorptionsvermögen meiner Fläche nicht direct bestimmt habe, und da der oben angeführte Fehler von relativ geringer Bedeutung ist, habe ich, statt eine willkürliche Correction anzubringen, vorgezogen, die direct ausgeführten Bestimmungen ohne weiteres anzuführen.

3. Dass eine ca. 4 mm dicke Platte von Steinsalz für Strahlen verschiedener Wellenlänge gleich durchlässig ist, eine Annahme, die, wenn auch nicht von strenger Gültigkeit, doch

1) K. Ångström, Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. Nr. 6. p. 385. 1888 u. Wied. Ann. **36**. p. 715. 1889.

2) Vgl. auch: K. Ångström, Upsala Univ. Årsskrift 1885 u. Wied. Ann. **26**. p. 253. 1885.

ohne Zweifel für eine so geringe Dicke der absorbirenden Schicht, wie die hier angewandte, erlaubt ist.

Der Leser wird übrigens leicht finden, dass kleinere Abweichungen von der Richtigkeit dieser Annahme ohne Bedeutung für die Gültigkeit unserer Schlussfolgerungen sind.

II. Instrumente und Methoden.

1. Das Bolometer.

Bei den ersten vorläufigen Versuchen, die Strahlung auf photometrischem Wege zu bestimmen, wurde ein Spectroskop „à vision directe“ (von Duboscq, Paris) benutzt. Dasselbe wurde mit einem Vierordt'schen Doppelspalt (von Krüss in Hamburg) versehen; vor die eine Spalthälfte war ein kleines Prisma von Kreide gestellt, wodurch das Licht von der seitlich aufgestellten Vergleichslampe in das Spectroskop hinein diffundirt wurde. Das Versuchsrohr mit gerader Durchsicht wurde vor die andere Spalthälfte in Richtung der Spectroskopaxe aufgestellt. Die Versuche wurden in leicht verständlicher Weise angestellt und ich kann umsomehr die Einzelheiten dabei übergangen, da ich im Folgendem nur beiläufig die in dieser Weise angestellten Versuche erwähnen werde.

Die photometrischen Bestimmungen lassen nämlich viel zu wünschen übrig und erlauben nur ein sehr beschränktes Gebiet des Spectrums zu studiren. Es war aber hier meine Aufgabe, einen übersichtlichen Ueberblick über die Gesamtstrahlung und ihre Veränderungen bei der electricischen Entladung durch verdünnte Gase zu gewinnen, und hierfür scheint in vieler Hinsicht die bolometrische Methode besonders geeignet. Es fragte sich nur, ob diese Methode eine genügend grosse Empfindlichkeit darbiete. Durch vorläufige Versuche zeigte sich, dass man wenigstens für einige Gase von grösserem Strahlungsvermögen gute Resultate erhoffen kann.

Das von mir benutzte Bolometer¹⁾ bestand aus zwei aus Stanniol geschnittenen Gittern, die in zwei Ebonitrahmen befestigt waren. Die Rahmen wurden nach einander in ein

1) Das Instrument ist dasselbe, welches ich bei einer früheren Gelegenheit benutzt habe; vgl.: Ångström, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl. 13. Afd. 1. Nr. 4. 1887.

Rohr mit doppelten Wänden eingeschoben, ein kleiner Doppelschirm, der jedoch das Rohr nicht vollständig absperrt, schützt das hintere Gitter vor der Strahlung. Die Gitter werden durch vier in dem Rohre befindliche Diaphragmen vor störenden Luftströmungen geschützt. Das Gitter, durch welches das Instrument die Strahlung absorbiert, nimmt eine kreisförmige Fläche von 16 mm Durchmesser ein. Dasselbe ist sorgfältig durch galvanisch niedergeschlagenes Platin und darauf folgendes Berussen geschwärzt¹⁾. Die vier Zweige der Wheatstone-Brückencombination, von welchen, wie bekannt, die oben beschriebenen Gitter zwei bilden, haben alle dieselben Widerstände, je ungefähr 5 Ohm. Die Empfindlichkeit des Bolometers konnte durch Einschaltung von Widerständen in die Galvanometerzuleitung beliebig verändert werden. Um die relative Empfindlichkeit jedesmal bestimmen zu können, habe ich mich einer Anordnung bedient, die ich schon früher beschrieben habe.²⁾ Dieselbe besteht ganz einfach darin, dass man einen constanten Widerstand als Nebenschluss in einen der Brücken Zweige einführt. Die Ablenkungen des zum Bolometer gehörigen Galvanometers, die dem Schliessen oder Oeffnen dieses Nebenschlusses folgen, geben ein relatives Maass der vorhandenen Empfindlichkeit an. Bei der gewöhnlichen, von mir gebrauchten Empfindlichkeit des Instrumentes, zeigte das Bolometer-Galvanometer beim Schliessen oder Oeffnen des Nebenschlusses eine Ablenkung von ca. 75 Scalentheilen. Um die an verschiedenen Tagen angestellten Versuche vollständig mit einander vergleichbar zu machen, sind die Schlussresultate alle auf dieselbe Empfindlichkeit des Bolometers, und zwar auf die, welche einer Ablenkung von 75 Scalentheilen beim Schliessen des Nebenschlusses entspricht, reducirt.

1) Das gleichmässige Berussen geschieht sehr leicht durch folgendes einfaches Verfahren: Eine Stearinkerze wird so unter ein Drahtnetz gehalten, dass die Spitze der Flamme das Netz berührt. Der Rauch wird durch das Drahtnetz verbreitet und der Niederschlag auf den darüber bewegten Gegenstand sehr gleichmässig vertheilt. Die Wärme über dem Drahtnetz ist nicht grösser, als dass man nicht auch leicht schmelzbare Gegenstände, wie die Stanniolgitter, berussen könnte.

2) K. Ångström, Bestämning af känsligheten vid bolometrisk mätningar. Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. p. 379. 1888.

Da das Local, in welchem ich die Untersuchung ausführte¹⁾ für genaue Messungen infolge der durch den Strassenverkehr verursachten Erschütterungen sehr ungünstig war, sah ich mich genöthigt für diese Untersuchung ein besonderes Galvanometer herzustellen. Die Construction des Instrumentes weicht in vieler Hinsicht von der gewöhnlichen ab und hat die Anforderungen, die ich an dasselbe gestellt habe, befriedigend erfüllt. Es scheint mir jedoch nicht nöthig, hier hinsichtlich dieses Instrumentes auf Einzelheiten einzugehen, es mag genügen, anzugeben, dass der Gesamtwiderstand der zwei Galvanometerrollen klein ist (ca. 8 Ohm), dass die Empfindlichkeit des Instrumentes sehr gross ist (1 Scalentheil bei 2 m Scalenabstand entspricht $5,7 \times 10^{-9}$ Amp.), wozu kommt, dass die Schwingungsdauer verhältnissmässig klein (ein Ausschlag nimmt eine Zeit von ca. 8 Secunden in Anspruch), die Dämpfung aber stark ist. Durch eine besondere Untersuchung überzeugte ich mich von der genauen Proportionalität zwischen Stromstärke und Ablenkung, welche sich weit über die im Folgenden gesteckten Versuchsgrenzen erstreckt.

2. Die Entladungsröhre.

Bei den ersten Versuchen wurden alle Verbindungen zwischen den Entladungsröhren und der Luftpumpe durch Zusammenlöthen hergestellt, also ohne jeden Schliff. Bei diesen Röhren waren auch die Aluminiumelectroden im Glase mittels Platindrähte eingeschmolzen. Die beiden Enden des Rohres wurden mit plangeschliffenen Steinsalzplatten bedeckt, welche vermittle Natriumsilikat luftdicht angekittet wurden. Dieses Mittel hat sich als ganz vorzüglich erwiesen, es erfüllt alle Ansprüche an luftdichte Verbindungen, ohne das Steinsalz anzugreifen und ohne selbst bei den höchsten Verdünnungen verunreinigende Dämpfe abzugeben. Bei dieser Anordnung zeigte es sich jedoch immer besonders schwierig, die Gase, namentlich den Sauerstoff, rein zu erhalten; nachdem der electriche Strom einige Zeit hindurchgegangen war, zeigten

1) Diese Untersuchung war die letzte, welche ich während meiner Anstellung an der Hochschule in Stockholm ausgeführt habe.

sich immer im Spectrum die charakteristischen Streifen der Kohlenverbindungen und zwar trotzdem, dass keine solche Verbindung früher in das Rohr eingeführt worden war.

Möglicherweise liegt die Ursache hiervon in dem Einschmelzen der Electrode und dem Zusammenlöthen der Röhrenverbindungen. Bei diesen Operationen ist es unmöglich, zu vermeiden, dass die Stichflamme die inneren Wände des Rohres berührt, und die Möglichkeit ist dann ohne Zweifel vorhanden, dass sich Kohlenstoffverbindungen aus den Flammengasen abscheiden und sich in den Röhren, vielleicht auch auf den Aluminiumelectroden absetzen.

Um diese eventuellen Uebelstände zu verhüten, wurde in dem Rohre, das in dem Folgenden mit Nr. 3 bezeichnet wird, die Anordnung getroffen, dass jede Löthstelle vor dem Zusammensetzen des Apparates sorgfältig gereinigt wurde. Die Verbindung der verschiedenen Theile des Entladungsrohres, der Luftpumpe etc., wurde dann mit einigen Schliffen bewirkt, die ohne jedes Fett in einander gesteckt wurden. Durch einige Tropfen Natriumsilikat wurde die Verbindung vollständig luftdicht gemacht.

Für die Electrode wurde zuerst ein Rohr, wie Fig. 3 *A*, Taf. V, zeigt ausgezogen. Der sorgfältig gereinigte Aluminiumdraht wurde dann von der einen Seite, ein Platindraht von der anderen in das Rohr *B*, Fig. 3, eingeschoben und dieses bei *f* erhitzt, sodass der Platindraht und die Aluminiumelectrode in das Glasrohr in gewöhnlicher Weise eingeschmolzen wurden. Das Rohr wird dann in eine Glasplatte *m*, Fig. 3 *C*, eingeschliffen und erst nachdem diese Operationen vollendet sind und das Rohr sorgfältig von jedem Fett gereinigt ist, wird dasselbe bei *g*, Fig. 3 *B*, und darnach die Aluminiumelectrode bei *h* abgeschnitten. Das abgeschnittene Rohrstück hat also die Electrode vor Flammengasen und jeder Berührung geschützt.

Die Glasplatten *A* und *A*₁, werden darnach, wie Fig. 2 zeigt, mit Natriumsilikat an dem Entladungsrohr befestigt, und einige Tropfen Natriumsilikat werden auch um das Electrodenrohr (bei *l*, Fig. 3 *C*) gegossen. An der oberen Seite der Glasplatte wird ein Stück eines Glasrohres *B* und *B*₁, Fig. 2, angekittet. Durch eingegossenes Quecksilber kann man darauf

in gewöhnlicher Weise den Stromübergang von den Electroden zum Zuleitungsdraht vermitteln.

Um zu prüfen, ob der so hergestellte Apparat luftdicht ist, wird durch Pumpen ein sehr hohes Vacuum hervorgerufen. Wenn dies nach einigen Tagen noch unverändert war, habe ich die Verbindungen als gut betrachtet und erst dann, um das Natriumsilikat gegen Einwirkung der äusseren Luft zu schützen eine dünne Schicht von Wachs und Vaseline darüber gebracht. In das Entladungsrohr waren zwei feine Platindrähte als Electroden für die Ableitungen zum Electrometer bei C und C_1 , Fig. 2, eingeschmolzen. Es ist wohl kaum nöthig zu sagen, dass dies vor der schliesslichen Reinigung des Rohres geschah.

Es zeigte sich, dass es bedeutend leichter war reine Gase in dem so hergestellten Rohr, Nr. 3, zu erhalten. Es muss aber zugegeben werden, dass auch andere Umstände als die eben beschriebenen Anordnungen zu diesem guten Resultate beigetragen haben können, da ich auf die Reinigung der Röhre und auf die Herstellung der Gase alle mögliche Sorgfalt verwendet habe.

3. Die Herstellung der Gase, das Füllen und Evacuiren.

Nur vier Gase waren Gegenstand meiner Untersuchung: Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd.

Um die Gase in das Entladungsrohr einzuführen, wurde eine Vorrichtung getroffen, die in ihren Grundprincipien schon von Cornu angegeben ist.¹⁾ Fig. 1, Taf. V zeigt diese Anordnung, M ist ein ungefähr 1 m langes, 1 cm weites Rohr, dessen unteres Ende durch einen dickwandigen Kautschukschlauch mit dem Quecksilberreservoir O in Verbindung steht. Seitlich ist bei I ein Capillarrohr angeschmolzen, das, wie die Figur zeigt, so gebogen ist, dass verschiedene kleine Gefässe über sein offenes Ende geschoben werden können.

Wenn das Entladungsrohr leer ist, kann man durch Senken des Reservoirs O die Gase durch I einführen. Dieselben steigen durch M hinauf und durchstreichen vor ihrem Eintritt in das Entladungsrohr die drei Rohre P , S und C . Diese

1) A. Cornu, Journ. de phys. 5. p. 100 et p. 341. 1886.

enthalten: *P* Phosphorsäureanhydrid, *S* Schwefel und *C* reine Kupferspäne; ihre Aufgabe ist Wasser, Quecksilber und Schwefeldämpfe zu absorbiren.

Wasserstoff und Sauerstoff wurde durch electrolytische Zersetzung von reinem frisch destillirtem Wasser, das durch Phosphorsäureanhydrid angesäuert war, hergestellt. Das electrolytische Gefäß ist in Fig. 4 abgebildet. Es besteht aus einem U-förmigen Rohre *GAB*, in welches die Platinelektroden eingeschmolzen sind, aus einem nach unten offenen Rohre *H* und einem aufwärts gebogenen Rohre *D*. Das Rohr *H* wird über das Capillarrohr *I* (vgl. auch Fig. 1) geschoben und ein kleines Becherglas *C* darunter gesetzt. In dasselbe wird ein wenig Quecksilber gegossen, doch nur soviel, dass die untere Oeffnung von *H* frei bleibt. Das angesäuerte Wasser wird darauf in das Rohr *A* und in den Becher gegossen, wie auch einige Tropfen Quecksilber in *D*. Wenn man jetzt an *D* saugt, tritt die Luft durch den capillaren Theil *FE* hinaus, das ganze Gefäß wird mit Wasser gefüllt, das durch den Quecksilbertropfen bei *E* abgesperrt wird. Hebt man nun das Glas *C* ein wenig, so wird auch die untere Oeffnung von *H* durch Quecksilber abgesperrt. Dieses Verfahren kann ohne Schwierigkeit wiederholt werden, so oft man von einem Gase zu einem anderen übergehen will und das Entwicklungsgefäß kann, weil es von dem übrigen Apparat getrennt ist, leicht bei Bedarf gereinigt werden.

Bei den anderen Gasen wird nur ein kleines unten verengtes Rohr *P* (Fig. 4) als Gasbehälter benutzt. Die Gase werden in gewöhnlicher Weise in diesen Röhren über reinem Wasser und Quecksilber angesammelt. Nachdem das Quecksilber durch Hebung von dem Behälter *O* (Fig. 1) bis an die Oeffnung von *I* getrieben ist, wird der Behälter *P* über *I* geschoben. In dieser Weise konnte Stickstoff und Kohlenoxyd eingeführt werden.

Das erstgenannte dieser Gase wurde durch Leitung von Luft über erhitzte Kupferspäne, die bereits durch Wasserstoff reducirt waren, hergestellt. Die Luft war vorher durch reine Baumwolle, concentrirte Schwefelsäure und Kalilauge geleitet, um Staub, Wasserdämpfe und Kohlensäure zu entfernen.

Kohlenoxyd wurde aus Schwefelsäure und Oxalsäure dargestellt und durch Leitung über Kalilauge gereinigt.

Bei der Darstellung der Gase wurde die Anwendung jedes Schlauches sorgfältig vermieden und die verschiedenen Theile des Entwicklungsapparates direct aneinander gelöthet.

Zwischen dem Entladungsrohre und der Luftpumpe ist ein Quecksilberabschluss *N* (Fig. 1) eingesetzt; bei Heben des Behälters *F* steigt das Quecksilber in das U-förmige Rohr hinauf und unterbricht die Verbindung zwischen der Pumpe *W* und dem Entladungsrohr. Die Verbindung wird nur bei dem Evacuiren des Entladungsrohres hergestellt. Durch das U-förmige Rohr wird auch die Spannung des eingeführten Gases direct bestimmt, indem die Höhendifferenz des Quecksilbers in den beiden Schenkeln vermittels eines guten Kathetometers (von Perreaux in Paris) abgelesen wird. Natürlich muss dann zuerst die Luftpumpe sorgfältig (bis auf einige hundertstel Millimeter) entleert sein. Die Spannungsbestimmungen dürften, weil das U-förmige Rohr ein wenig zu eng war, nur auf ca. 0,02 mm genau sein.

Zur Entleerung der Entladungsrohre habe ich theils eine Pumpe von der gewöhnlichen Bessel-Hagen'schen Construction (von Müller in Berlin), theils auch bei späteren Versuchen eine Pumpe, die hauptsächlich nach den Angaben von Prütz¹⁾ gefertigt war, benutzt. Ich habe jedoch einige Veränderungen dabei angebracht, um die Handhabung bequemer zu machen und die Verdünnung rascher ausführen zu können. Die Einrichtung der Pumpe wird durch Fig. 1, *WTK*, leicht verständlich. Ich kann die so modificirte Pumpe sehr empfehlen.

Nachdem das Entladungsrohr durch längeres Pumpen so vollständig wie möglich entleert ist, werden einige Gasblasen durch Senkung des Reservoirs *O* (Fig. 1) eingelassen, Inductionsfunken durch das Entladungsrohr geleitet und dann wieder das Rohr entleert. Erst nachdem diese Operation mehrmals wiederholt worden war, wurden die bolometrischen Beobachtungen begonnen. Während derselben wurde auch oft die Strahlung des Rohres mit einem Spectroskope beobachtet, um das etwaige Vorhandensein von Verunreinigungen beurtheilen zu können.

1) Prütz, Wied. Ann. 62. p. 191. 1891.

4. Die Electricitätsquellen und die electricischen Messungen.

Als Electricitätsquelle wurde hauptsächlich ein Accumulator von 800 Elementen benutzt. Eine von den wohlbekannten kleinen Batterien des Planté'schen Modelles von 80 Elementen¹⁾ hatte ich von Hrn. Bréguet in Paris bekommen, die übrigen waren sehr sorgfältig in Stockholm nachgemacht.

Bei einigen Versuchen wurde ein Ruhmkorff'sches Inductorium mittlerer Grösse benutzt. Dasselbe war ein vorzüglicher Apparat von Carpentier in Paris. Der gewöhnliche Stromunterbrecher wurde jedoch fortgenommen und eine grosse electriche Stimmgabel (von König in Paris) mit veränderlicher Schwingungszahl (von 64—96 ganzen Schwingungen pro Secunde) an seiner Stelle angebracht. Mit diesem Unterbrecher functionirte das Inductorium sehr gleichmässig, sodass man ohne Schwierigkeit sowohl über die Stärke des Inductionstromes wie auch über die Strahlung des Rohres Messungen anstellen konnte. Zur Leitung des electricischen Stromes wurden dicke kautschuk-isolirte Kupferdrähte benutzt. Um die Stromstärke beliebig variiren zu können, waren einige grosse Flüssigkeitswiderstände in die Leitung eingeschaltet. Sie waren nach den Angaben von Hittorf²⁾ hergestellt, also mittelst in Amylalkohol gelöstem Jodeadmium und konnten durch veränderte Einstellung der Electroden beliebig vermindert oder vergrössert werden.

Zur Bestimmung der Stromstärke bediente ich mich eines aperiodischen Spiegelgalvanometers, mit kautschuk-isolirtem Draht (von Hartmann & Braun in Frankfurt). Die Galvanometerrollen waren für kleine Empfindlichkeit eingestellt. Der Reductionsfactor des Instrumentes wurde mit Hülfe eines Silbervoltameters bestimmt. Ein Ausschlag von einem Scalentheil entspricht 0,000015 Amp. und die Empfindlichkeit zeigte sich während der Arbeit genügend constant.

Zur Bestimmung der Potentialdifferenz in den Entladungsröhren diente ein Quadrantelectrometer von Mascart (von Carpentier in Paris bezogen). Die Quadranten wurden durch

1) G. Planté, Recherches sur l'électricité. Paris 1883.

2) W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 559. 1879.

eine kleine Wasserbatterie auf constanter Ladung gehalten; die Nadel konnte vermittels eines Commutators abwechselnd mit dem einen oder anderen der in dem Entladungsrohre eingeschmolzenen Platindrähte in Verbindung gesetzt werden. Die Ablesung des Instrumentes fand durch die Projectionsmethode statt. Um die Empfindlichkeit zu bestimmen, wurde die Nadel des Electrometers abwechselnd mit den beiden Endpunkten eines Widerstandes von 10 000 Ohm in Verbindung gesetzt und gleichzeitig ein Strom von 0,00673 Amp. durch den Widerstand geleitet. Hierbei ergab sich eine Aenderung des Ausschlages des Electrometers von 8,6 Scalentheilen. Ein Scalenthail entspricht also einer Potentialänderung von 7,8 Volt. Obschon diese Empfindlichkeit des Electrometers sich während des Versuches ein wenig geändert hatte, werde ich dieselbe im Folgenden mit genügend grosser Genauigkeit als constant voraussetzen können.

III. Versuchsanordnung und Beobachtungen.

Taf. V, Fig. 1 gibt ein schematisches Bild über die Anordnung und die Zusammenstellung der verschiedenen Theile des Apparates. Das Bolometer *B* ist hinter einem doppelwandigen Schirm *L* aufgestellt, dieser Schirm ist in der Axenrichtung des Bolometers mit zwei Löchern versehen; zwischen den Wänden befindet sich ein kleiner, beweglicher Schirm, der mittels einer Schnur schnell hinaufgezogen werden kann. Das Entladungsrohr *AH* ist vor den Löchern des Schirmes und in der Axenrichtung des Bolometers aufgestellt. Eine Kundt'sche Glasfeder *D* verbindet das Entladungsrohr mit den übrigen bereits beschriebenen Theilen des Apparates.

Bei den Beobachtungen wird, sobald das Bolometer genügend ruhig ist, die Empfindlichkeit des Instrumentes zuerst in der schon beschriebenen Weise bestimmt. Darnach wird der electriche Strom der Accumulatoren oder des Inductoriums geschlossen, die Stromstärke durch Ablesung des Galvanometers *AG*, die Potentialdifferenz in dem Entladungsrohre durch Ablesung des Electrometers *E* bestimmt. Während dieser Beobachtungen wird ungefähr jede Minute eine Beobachtung des Bolometer-Galvanometers *BG* vorgenommen und die Beobachtungszeiten notirt. Sobald die Strahlung, welche

gewöhnlich gleich nach dem Stromschluss infolge der Erwärmung der Rohrwände ziemlich rasch zunimmt, vollständig oder wenigstens beinahe stationär ist, wird der Strom unterbrochen und gleich darnach die Strahlung des Rohres ohne Strom beobachtet. Noch zwei bis drei Bestimmungen dieser Strahlung werden mit ungefähr einer Minute Zwischenzeit gemacht. Durch diese Beobachtungen lässt sich die Gesamtstrahlung des Gases in dem Rohre berechnen. Um aber etwas über die qualitativen Aenderungen der Strahlung kennen zu lernen, wird auch die von einer Alaunplatte durchgelassene Strahlung bestimmt. Zu diesem Zwecke wird eine solche Platte von 3,95 mm Dicke vor die Oeffnung des Schirmes *L* (Fig. 1) und zwar zwischen denselben und das Bolometer geschoben. Bei dieser letzten Bestimmung braucht man nicht die Strahlung der Wände des Entladungsrohres besonders zu eliminiren. Diese wird nämlich vollständig von der Alaunplatte absorbirt. Man ersieht dies daraus, dass die Strahlung, welche die Alaunplatte durchlässt, gleich nach Schluss des Stromes ihren constanten Werth erreicht, um sofort beim Oeffnen des Stromes vollständig zu verschwinden.

Die Strahlung, welche die Alaunplatte durchlässt, ist, wie bekannt, hauptsächlich die des sichtbaren Spectrums. Wie ich mich vermittels des Spectrobolometers überzeugt habe, beginnt die Absorption der Alaunplatte schon gleich in dem ultrarothem Spectrum und wird sehr schnell vollständig.

Bei der directen Bestimmung der Gesamtstrahlung der Röhre bekommt man, wie schon gesagt, die Strahlung der Gase vermehrt durch die Strahlung der erwärmten Rohrwände. Um die Strahlung der Gase allein beurtheilen zu können, muss also die Strahlung der Rohrwände eliminirt werden. Durch die Beobachtungen kennen wir die Strahlung während der Abkühlung des Rohres und aus diesen Beobachtungen muss also die Strahlung der erwärmten Rohrwände berechnet werden.

Man könnte nun wohl meinen, dass diese Berechnung am besten durch Anwendung des Newton'schen Abkühlungsgesetzes und mit Zuhülfenahme der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt werden könnte. Wenn man aber einige Versuche in dieser Hinsicht macht, so findet man bald, dass das ge-

wöhnliche Abkühlungsgesetz hier im allgemeinen nicht anwendbar ist. Die Ursache ist auch leicht einzusehen. Die Rohrwände werden nicht überall bis auf dieselbe Temperatur erhitzt und verschiedene Theile kühlen sich also mit verschiedener Anfangsgeschwindigkeit ab. Da nun die Anfangsbedingungen für verschiedene Stromstärke, Gase und Drucke verschieden sind, ist es auch natürlich, dass die Abkühlungscurve unter verschiedenen Umständen verschiedene Formen annimmt. Unter solchen Umständen habe ich es für das beste gehalten, nur die reine graphische Methode zu benutzen, um den Werth der Strahlung der Rohrwände zu extrapoliren. Allerdings ist bei dieser Bestimmungsmethode ein wenig Willkürlichkeit nicht zu vermeiden. Da jedoch die erste Bestimmung der Strahlung der Rohrwände nur ca. 10 Secunden nach dem Oeffnen des Stromes erfolgte, braucht man die Abkühlungscurve nur sehr unbedeutend zu extrapoliren, und die Fehler, welche von der graphischen Construction herrühren, sind infolgedessen verhältnissmässig klein. Um mich davon näher zu überzeugen, habe ich die in dieser Weise zuerst ausgeführte Construction nach einigen Monaten wieder gemacht und dabei durchaus übereinstimmende Resultate gefunden. Als Beispiel einer Bestimmung mag der folgende, vollständige Auszug des Beobachtungsprotokolls angeführt werden.

Stickstoff. Rohr Nr. 3.

Druck 1,15 mm. Potentialdifferenz 36,7 Scalentheile.

Stromstärke: 75 Scalentheile.

Empfindlichkeit des Bolometers 79.

Abstand zwischen der Kathode und der ersten Schicht des positiven Lichtes 15 mm.

<i>Zeit</i>	<i>Bolometerablenkung</i>
19 ^m 55 ^s	49,2
20 ^m 55 ^s	50,5
21 ^m 55 ^s	50,2
22 ^m 45 ^s	der Strom wird abgebrochen
23 ^m 0 ^s	24,5
23 ^m 35 ^s	23,0
24 ^m 20 ^s	19,9

Die Gesamtstrahlung von Gas und Rohrwänden ist also 50,0. Die Strahlung der erwärmten Rohrwände findet man durch graphische Extrapolation für die Zeit 22^m 45^s gleich 26,0.

Die Strahlung des Gases war also 24,0. Wenn wir diesen Ausschlag auf normale Empfindlichkeit (75 Scalentheile) reduciren, finden wir die Gesamtstrahlung = 22,8. Die Genauigkeit jeder einzelnen Bestimmung ist natürlich von der Stärke der Strahlung abhängig. Bei den Bestimmungen der Gesamtstrahlung kann, in einzelnen Fällen wenigstens, der Fehler des Endresultats einer Bestimmungsreihe einen Scalenthail betragen. Dies bedeutet in Procenten des Endresultats einen Fehler von höchstens ca. 3 Proc. bei den grössten Werthen der Strahlung (bei Stickstoff), 25 Proc. bei den kleinsten (einigen Bestimmungen der Strahlung des Wasserstoffs).

Bei Bestimmungen der von einer Alaunplatte durchgelassenen Strahlung sind die Fehler bedeutend kleiner und betragen höchstens 0,5 Scalentheile. Jedes in dem Folgenden gegebene Schlussresultat ist jedoch das Mittel aus mehreren Bestimmungen, weshalb die Fehler noch kleiner sind.

Als Zeit der Bestimmungen ist hier und überall die mittlere Zeit des Ausschlages genommen. Alle Rechnungen, welche in den Tabellen vorkommen, sind mit dem Rechenstab gemacht worden.

IV. Ueber die Beziehung zwischen Stromstärke und Strahlung.

Bei den ersten Versuchen, die Beziehung zwischen Stromstärke und Strahlung zu ermitteln, wurde das Licht spectrophotometrisch untersucht. Als Stromquelle diente das Ruhmkorff'sche Inductorium. Die Stärke des primären Stromes konnte variirt werden, theils durch Anwendung einer verschiedenen Anzahl von Elementen, theils durch Einführung von Widerständen. Die Electricitätsmenge, welche durch das Entladungsrohr ging, wurde theils durch ein in der Strombahn eingeführtes Galvanometer, theils durch ein Electrometer, dessen Nadel und eines Quadrantenpaar mit dem einen, und dessen anderes Quadrantenpaar mit dem anderen Endpunkte eines in der Leitung eingeführten Widerstandes verbunden war, gemessen.

Mit schwachen Strömen*arbeitend fand ich immer eine sehr befriedigende Proportionalität zwischen Stromstärke und Strahlung, bei grösserer Stromstärke traten aber sehr oft bedeutende Abweichungen von diesem Gesetze ein. In solchen Fällen

zeigte es sich jedoch immer, dass die Gase sich permanent verändert hatten, denn, wenn ich hiernach zu schwächeren Strömen zurückkam, fand ich nicht dieselbe Strahlung wieder.

Die Untersuchungen mit dem Bolometer und dem Accumulatorstrom, sowohl über die Gesamtstrahlung wie auch über die durch eine Alaunplatte durchgelassene Strahlung, hat, in den Grenzen der Beobachtungen, diese Folgerungen gut bestätigt. Von den zahlreichen Bestimmungen, welche ich, um dies zu constatiren, ausgeführt habe, mögen die folgenden hier angeführt werden.

Die Tabelle 1, betreffend die Gesamtstrahlung, ist eigentlich Auszug des Beobachtungsprotokolles (vgl. p. 506). Jede Beobachtungsreihe ist in zwei Horizontalcolumnen enthalten, indem zuerst die Nummer des Versuches, und die Stromstärke, und dann erst die eigentlichen Bolometerbeobachtungen aufgeführt werden. In der ersten Horizontalcolumnen stehen dann die Beobachtungszeiten, in der zweiten die Ablesungen des Bolometer-Galvanometers (B. G.) und zwar zuerst das Mittel aus den Beobachtungen während des Stromdurchganges, sodann der extrapolierte Werth der Strahlung der erwärmten Rohrwände im Momente des Oeffnens des Stromes, abgeleitet aus den folgenden drei Beobachtungen über diese Strahlung in verschiedenen Zeiten. Mit I ist die Gesamtstrahlung des Gases bezeichnet, und mit I_{100} der hieraus berechnete Werth der Strahlung auf die Stromstärke 100 bezogen.

Tabelle 1.

Stickstoff. Druck = 0,4 mm. Gesamtstrahlung, Rohr Nr. 2.

Stromst.	Bolometerbeobachtungen Zeit und Scalenableung						I	$I_{100}^1)$
172	Zeit	0 ^m 30 ^s	0 ^m 45 ^s	1 ^m 15 ^s	2 ^m 5 ^s		36,0	20,9
	B. G.	62,0 26,0	24,0	20,5	17,3			
106	Zeit	0 ^m 30 ^s	0 ^m 45 ^s	1 ^m 35 ^s	2 ^m 30 ^s		21,7	20,5
	B. G.	40,7 19,0	17,4	14,4	10,2			
74	Zeit	0 ^m 0 ^s	0 ^m 15 ^s	0 ^m 50 ^s	1 ^m 35 ^s		15,5	21,0
	B. G.	26,0 9,5	9,2	8,2	7,7			
45	Zeit	0 ^m 0 ^s	0 ^m 20 ^s	1 ^m 30 ^s	2 ^m 30 ^s		9,1	20,2
	B. G.	18,0 8,9	8,2	5,5	5,2			
30	Zeit	0 ^m 45 ^s	1 ^m 0 ^s	1 ^m 50 ^s	2 ^m 45 ^s		6,4	21,3
	B. G.	10,9 4,5	4,2	3,7	3,4			

1) In dieser und der folgenden Tabelle 2 ist I_{100} nicht auf normale Empfindlichkeit reducirt.

Unter denselben Versuchsbedingungen, jedoch mit einer vor der Bolometeröffnung befindlichen Alaunplatte, wurden folgende Bestimmungen gleichzeitig ausgeführt. Jede in der zweiten Columnne eingeführte Zahl ist Mittel aus vier Bestimmungen.

Tabelle 2.

Stickstoff, Druck = 0,4 mm, Strahlung durch Alaun, Rohr Nr. 2.

Stromst. I	B. G. L.	L ₁₀₀
130	21,6	16,7
99	17,1	17,3
64	11,1	17,4
33	5,6	17,0

Aus diesen Versuchen folgt also:

1. Bei constantem Druck ist für ein und dasselbe Gas die Strahlung der Stromstärke proportional, und weil dies nicht nur für die Gesamtstrahlung, sondern auch für einen bestimmten Theil derselben gilt, so ist

2. die spectrale Vertheilung der Energie bei constantem Druck von der Stromstärke unabhängig.

V. Ueber die Strahlung verschiedener Gase bei verschiedenem Drucke.

Durch die jetzt nachgewiesene Proportionalität zwischen Strahlung und Stromstärke wird die folgende Untersuchung sehr vereinfacht, da wir alle Bestimmungen bei verschiedenem Drucke der Gase, um den Vergleich zu erleichtern, auf dieselbe Stromstärke reduciren können. Dies wird auch in den folgenden Tabellen geschehen.

Infolge der angewandten graphischen Berechnungsmethode schien es mir wünschenswerth, so viel wie möglich von dem directen Beobachtungsmaterial mittheilen zu können. Weil aber eine Beschränkung nothwendig war, habe ich es für zweckmässig gehalten, dasselbe nur für das Rohr Nr. 3 (Taf. V, Fig. 2), hier aber vollständig anzuführen. Ich schlage nämlich den Werth dieser Beobachtungen verhältnissmässig höher als den der übrigen an, theils der grösseren Sorgfalt wegen, mit welcher die Gase etc. hergestellt wurden, theils auch deswegen, weil dieses Rohr

das einzige ist, für welches ich alle notwendigen Bestimmungen ausgeführt habe, um den absoluten Betrag der Strahlung des Gases zu berechnen. Betreffs der übrigen Beobachtungen möchte ich nur bemerken, dass die Uebereinstimmung derselben mit den hier angeführten im grossen und ganzen sehr befriedigend ist. In der Originalabhandlung sind die Beobachtungen mit dem Rohre Nr. 3 vollständig angeführt in Tabellen ähnlich der Tabelle 1. Indem wir den Leser, für welchen das Beobachtungsmaterial von Interesse sein kann, auf die ausführlichere Mittheilung verweisen, führen wir hier nur die Zusammenstellung der Resultate an. Die Tabellen 3—5 enthalten also den Druck des Gases in Millimetern, die Gesamtstrahlung, I_{100} , in Bolometerablenkungen und für eine Stromstärke von 100 Scalentheile des Accumulatorgalvanometers ($=0,0015$ Amp.) und auf normale Empfindlichkeit des Bolometers (75 Scalentheile; vgl. p. 497) reducirt; weiter die Strahlung durch Alaun, L_{100} , unter denselben Bedingungen und schliesslich das Verhältniss dieser beiden Strahlungen oder L/I . Vor den Columnen, welche I_{100} und L_{100} enthalten, sind in besonderen Columnen die Anzahl Beobachtungen aus welchen I_{100} und L_{100} Mittel sind, angegeben.

Die Dimensionen des Rohres Nr. 3 waren: Abstand zwischen den Electroden 20,0 cm, Abstand zwischen den Ableitungen zum Electrometer 6,0 cm, Durchmesser des Entladungsrohres 1,32 cm. Das Rohr war so aufgestellt, dass der Abstand zwischen dem Bolometergitter und der nächststehenden Electrode 11,7 cm betrug. Diese Electrode wurde immer als die positive genommen.

Tabelle 3.
Wasserstoff.

Druck	I_{100}		L_{100}		L/I	Druck	I_{100}		L_{100}		L/I
	Anzahl Beob.	Mittel	Anzahl Beob.	Mittel			Anzahl Beob.	Mittel	Anzahl Beob.	Mittel	
0,12	3	3,7	14	2,2	0,60	0,76	4	5,9	8	1,4	0,24
0,15	3	4,2	—	—	—	0,90	3	6,4	—	—	—
0,16	3	3,2	4	2,0	0,63	1,02	4	6,6	10	1,8	0,27
0,18	3	4,1	12	1,5	0,37	1,26	3	5,5	8	1,3	0,24
0,23	3	4,8	—	—	—	1,60	2	4,2	10	1,2	0,29
0,42	3	5,6	—	—	—	2,30	4	2,6	10	0,9	0,35
0,56	3	4,4	10	1,8	0,40	2,66	2	2,6	10	0,8	0,31

Es möge hier erwähnt werden, dass bei hoher Verdünnung des Wasserstoffes die Strahlung, nachdem der Strom einige Zeit lang durchgegangen ist, ziemlich stark abnimmt, was natürlich zur Folge hat, dass man schwerlich gut übereinstimmende Beobachtungen erhalten kann.

Sauerstoff. Die Versuche, die Strahlung von Sauerstoff zu bestimmen, haben leider keine definitiven Resultate gegeben. Mit der hier benutzten Empfindlichkeit des Bolometers ist nämlich die Strahlung zu schwach, um bestimmt werden zu können. Die Versuche wurden mit Gas von 0,8, 0,77 und 1,27 mm Druck angestellt (Potentialgefälle 21—31 Volt per Centimeter) und mit Anwendung einer Stromstärke von 120 Scalentheilen. Die Bolometerablenkungen für die Gesamtstrahlung (I) schwanken unter diesen Verhältnissen zwischen 0 bis 1,8 Scalentheilen, Werthen, die in Betracht der dabei vorkommenden Beobachtungsfehler zu klein sind, um eine, wenn auch nur ungefähre Schätzung der Strahlung zu erlauben. Alles was wir von dieser Strahlung sagen können ist, dass dieselbe unter den angeführten Verhältnissen und für eine Stromstärke von 100 Scalentheilen (A. G.) = 0,0015 Ampère kleiner als 1,5 Scalentheile (B. G.) ist.

Tabelle 4.

Stickstoff.

Druck	I ₁₀₀		L ₁₀₀		L/I	Druck	I ₁₀₀		L ₁₀₀		L/I
	Anzahl Beob.	Mittel	Anzahl Beob.	Mittel			Anzahl Beob.	Mittel	Anzahl Beob.	Mittel	
0,12	1	22,3	6	17,0	0,77	*0,88	2	29,5	2	21,0	0,71
0,15	3	20,8	4	19,8	0,95	1,00	2	32,4	5	24,1	0,76
*0,16	3	20,9	7	18,9	0,90	1,10	2	32,8	4	20,4	0,62
*0,23	3	21,5	3	18,1	0,84	1,15	2	30,0	6	21,5	0,72
0,35	2	21,9	6	18,5	0,85	*1,21	2	35,7	3	24,8	0,70
0,42	2	23,8	7	19,3	0,81	1,45	3	33,8	6	18,9	0,56
0,57	3	26,8	4	20,8	0,78	*1,54	3	33,3	5	23,0	0,69
*0,66	2	28,7	2	23,9	0,83	1,62	2	30,7	5	21,0	0,68
0,70	3	29,6	6	23,8	0,77	*1,64	3	37,3	4	25,4	0,68
0,72	2	27,3	6	20,5	0,75	—	—	—	—	—	—

Bei Stickstoff ist die Erwärmung und Strahlung der Rohrwände verhältnissmässig klein. Infolge dessen ist es auch möglich, die Beobachtungen in einfacherer Weise, als vorher beschrieben ist (Abth. III), auszuführen. Man braucht nämlich nur

zwei Beobachtungen unmittelbar vor und nach dem Stromdurchgange, um die Strahlung des Rohres zu ermitteln und diese Strahlung von der während des Stromdurchganges beobachteten abzuziehen. In dieser Weise wurden die in der Tabelle mit * bezeichneten Bestimmungen erhalten.

Tabelle 5.

Kohlenoxyd.

Druck	I ₁₀₀		L ₁₀₀		L/I	Druck	I ₁₀₀		L ₁₀₀		L/I
	Anzahl Beob.	Mittel	Anzahl Beob.	Mittel			Anzahl Beob.	Mittel	Anzahl Beob.	Mittel	
0,14	2	9,45	8	4,4	0,47	0,59	2	10,8	8	3,4	0,32
0,18	1	9,9	4	5,6	0,57	0,74	2	9,2	18	3,2	0,35
0,29	2	10,95	12	4,3	0,39	0,77	1	13,4	6	3,3	0,25
0,32	2	12,2	14	4,4	0,36	0,99	2	11,7	12	3,2	0,27
0,46	2	10,4	8	3,5	0,34	1,62	2	15,5	10	2,2	0,14

Diese Tabellen lehren uns:

1. Dass die Gesamtstrahlung verschiedener Gase höchst verschieden ist.

2. Die Grösse der Gesamtstrahlung verschiedener Gase steht in keiner erkennbaren Beziehung zu dem Absorptionsvermögen derselben bei gewöhnlicher Temperatur. Wir wissen z. B. dass Kohlenoxyd ein sehr beträchtliches, Stickstoff aber ein sehr geringes Absorptionsvermögen bei gewöhnlicher Temperatur hat.¹⁾ Hinsichtlich der soeben erörterten Strahlung aber sind die Rollen vertauscht.

3. Die Lichtstrahlung nimmt mit zunehmendem Drucke ab.

4. Das Verhältniss zwischen der Lichtstrahlung und der Gesamtstrahlung ist von dem Drucke abhängig, und die spectrale Vertheilung der Energie ändert sich also mit dem Drucke. Mit zunehmender Verdünnung der Gase nimmt dieses Verhältniss im allgemeinen zu, oder, mit anderen Worten, das Intensitätsverhältniss ändert sich so, dass mit vermehrter Verdünnung der Schwerpunkt des Energiespectrums

1) In Betreff der Absorption dieser Gase siehe: K. Ångström, Bihang til K. Svenska Vet.-Akad. Handl. 15. Nr. 9. 1889 oder Wied. Ann. 39. p. 267. 1890. Ebenso: Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. Nr. 9. p. 549. 1889 und Nr. 7. p. 331. 1890 oder Physikalische Revue 1. p. 597. 1892.

gegen die violette Seite des Spectrums verschoben wird. Dabei steigt das Verhältniss zwischen Lichtstrahlung und Gesamtstrahlung bis auf Werthe, die man wohl nicht erwartet hatte, so z. B. bei Stickstoff bis auf 0,95.

VI. Einige Beobachtungen mit dem Ruhmkorff'schen Inductorium.

Um die Veränderungen des Verhältnisses zwischen Licht- und Gesamtstrahlung bei grösseren Veränderungen des Druckes verfolgen zu können, machte ich einige Versuchsreihen mit dem Ruhmkorff'schen Inductorium. Stickstoff und Kohlenoxyd wurden untersucht, dabei wurde aber für Stickstoff die Strahlung des Rohres nur nach der früher erwähnten einfachen Correctionsmethode ermittelt. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 6.

Stickstoff. Gesamtstrahlung und Strahlung durch Alaun.

Druck	I_{100}	L_{100}	L/I	Druck	I_{100}	L_{100}	L/I
0,16	19,0	17,2	0,91	2,42	28,8	12,5	0,43
0,23	19,7	16,3	0,83	3,20	25,4	12,8	0,50
0,66	21,4	14,7	0,69	4,12	25,7	10,0	0,39
0,88	23,0	14,6	0,64	5,0	30,0	7,3	0,24
1,21	23,4	14,4	0,62	6,24	38,5	4,3	0,11
1,54	25,9	17,1	0,66	8,28	48,2	4,5	0,09
1,64	25,4	15,0	0,50	12,04	61,3	2,5	0,03

Tabelle 7.

Kohlenoxyd. Gesamtstrahlung und Strahlung durch Alaun.

Druck	I_{100}	L_{100}	L/I
0,99	7,4	2,0	0,27
1,7	9,3	1,5	0,16
6,3	23,6	ca. 0,8	0,03
12,8	69,4	unbestimmbar	

Auf Taf. V, Fig. 11 und 12 sind diese Resultate graphisch wiedergegeben. In der Fig. 11 sind die Drucke als Abscissen, I_{100} und L_{100} für die beiden Gase als Ordinaten genommen. In der Fig. 12 sind ebenfalls die Drucke als Abscissen, als Ordinaten aber das Verhältniss L/I genommen, die punktirte Curve für Stickstoff, die ausgezogene für Kohlenoxyd. Diese Resultate bestätigen vollständig die Folgerungen, die wir

schon gezogen haben. Das Verhältniss L/I nimmt mit zunehmendem Drucke schnell ab, bei Stickstoff von 0,90 bis auf 0,04 für eine Druckvermehrung von 0,16—12,04 mm, bei Kohlenoxyd von 0,27 bis auf weniger als 0,01 für eine Druckänderung von 0,99—12,8 mm.

Die Uebereinstimmung zwischen den Werthen von L/I , welche wir für gleichen Druck mit dem Induktorium und mit dem Accumulatorstrom gefunden haben, ist für Kohlenoxyd sehr befriedigend. Für Stickstoff ist sie weniger gut und im allgemeinen sind die Werthe von L/I bei intermittenter Entladung niedriger ausgefallen, als bei constantem Strome. Eine Erklärung dieses Verhältnisses werden wir unten zu geben versuchen.

In der obenstehenden Tabelle habe ich auch die Strahlung für dieselbe Stromstärke berechnet. Für das gemeinsame Versuchsgebiet (zwischen 0,15—2 mm Druck) sind die Verhältnisse bei Accumulator und Induktorium in ihren Hauptzügen dieselben; mit einer Vermehrung des Druckes folgt eine Vermehrung der Gesamtstrahlung.

Bei Stickstoff scheint bei ca. 3,6 mm Druck ein schwaches Minimum der Strahlung vorhanden zu sein, was in Uebereinstimmung mit dem früher bei Wasserstoff gefundenen Werthe der Strahlung steht (vgl. auch später p. 524—525). Leider sind die Bestimmungen bei Kohlenoxyd nicht zahlreich genug, um das Vorhandensein eines solchen sehr schwerverständlichen Minimums auch bei diesem Gase zu constatiren. Bei grösserem Drucke nimmt die Strahlung stetig zu.

Obschon die Stromstärke in diesen Versuchen mit demselben Galvanometer wie vorher bestimmt ist, sind doch die oben angeführten Werthe der Stromstärke nicht direct mit den früheren, in den Versuchen mit dem Accumulator gefundenen, vergleichbar. Nichtsdestoweniger können wir aber aus denselben einen wichtigen Schluss ziehen. Die durch die Galvanometerablenkung mit Hülfe des Reductionsfactors für constante Ströme hergeleitete mittlere Intensität des Inductionsstromes kann wohl kleiner als die wirkliche, nicht aber grösser sein. Wenn, wie ich wenigstens für schwächere Stromintensität gezeigt habe, die Strahlung der Stromstärke proportional ist, so könnten wir aber unter diesen Umständen erwarten, dass der

Werth der Strahlung mit Inductionsströmen grösser als die entsprechende mit constantem Strome ausfallen würde. Das ist aber nicht der Fall. Im Gegentheil ist die mit Inductionsströmen erzeugte Strahlung immer kleiner, als die entsprechende mit constantem Strome hervorgebrachte.

Man könnte vielleicht meinen, dass das Bolometer nicht bei intermittirender Beleuchtung die mittlere Intensität angebe. Ich habe mich aber durch directe Versuche überzeugt, dass dies der Fall ist. Eine Scheibe, in welcher Oeffnungen im Rande angebracht waren, wurde zwischen dem Bolometer und einer constanten Lichtquelle so befestigt, dass durch Drehen derselben intermittirendes Licht auf das Bolometer fiel. Die Ablenkung des Bolometer-Galvanometers war, sobald die Ablenkung stetig war, bei verschiedener Rotationsgeschwindigkeit immer dieselbe.

Es bleiben mithin nur zwei Erklärungen dieses Verhältnisses übrig. Entweder verliert das Proportionalitätsgesetz, welches wir oben gefunden haben, bei den grossen Intensitäten, welche in den Inductionsfunken vorkommen, seine Gültigkeit, oder die Strahlung nimmt nicht bei Schluss des Stromes augenblicklich ihren endgültigen Werth an. Wenn es sich nämlich so verhält, dann muss ein Inductionsstrom eine kleinere Strahlungsintensität als der constante Strom ergeben, wenn auch die in den beiden Fällen übergeführte Electricitätsmenge dieselbe ist. Vermehrt man die Schwingungszahl des Unterbrechers, muss für dieselbe mittlere Intensität des Stromes die Strahlungsintensität abnehmen, solange noch die Funken einander mit so grossen Zeitintervallen folgen, dass das Gas zwischen jeder Entladung in seinen normalen Zustand zurückkehrt. Ist dies nicht länger der Fall, das heisst, werden die Zeitintervalle so klein, dass das Gas nicht in seinen normalen Zustand zurückkehrt, so muss die Strahlung wieder zunehmen.

Unter solchen Umständen darf man deswegen auch nicht erwarten, dass L/I denselben Werth bei constantem und bei intermittirendem Strome hat. Bei den Versuchen mit Stickstoff fanden wir auch, dass die Werthe von L/I bei constantem Strome im allgemeinen ein wenig grösser ausfielen, als bei intermittirendem, was also bedeuten würde, dass nach dem

Stromschlusse die Strahlung der kürzeren Wellenlängen später als die Strahlung der längeren zur vollen Entwicklung kommt.

Da mir eine Bestätigung des hier gesagten von Wichtigkeit war, beabsichtigte ich, Versuche mit verschiedener Brechungszahl auszuführen. Leider war mir die Zeit für diese Versuche zu knapp, weshalb ich dieselben auf eine andere Gelegenheit verschieben musste.

VII. Ueber die Bestimmung der Strahlung in absolutem Maasse.

Bis jetzt haben wir nur die direct gefundenen Bolometerangaben als Maass der Strahlung genommen und aus diesen einige Schlüsse gezogen mit Nichtbeachtung einiger kleiner Correctionen, welche für diese Schlüsse ohne Bedeutung waren. In dem Folgenden wollen wir versuchen, die Strahlung in absolutem Maasse auszudrücken und das Strahlungsvermögen des Gases zu berechnen.

Zu diesem Zwecke ist es erstens nöthig, die Empfindlichkeit des Bolometers zu kennen, d. h. den Werth der Scalentheile in Grammc calorien pro Secunde und Quadratcentimeter auszudrücken, und zweitens den Einfluss der Rohrwände auf die Strahlung näher kennen zu lernen.

1. Bestimmung der Empfindlichkeit des Bolometers.

Bei dieser Bestimmung kann man verschiedene Wege einschlagen. So hat R. v. Helmholtz, der, mit Ausnahme des Verfassers, der einzige ist, welcher den absoluten Werth der Empfindlichkeit seines Instrumentes genauer bestimmt hat¹⁾, drei verschiedene Methoden versucht. Die, welche ich früher befolgt habe²⁾ und welche auf einer vergleichenden Bestimmung der Strahlung einer und derselben Wärmequelle mit dem Bolometer und mit dem von mir construirten Pyrheliometer³⁾ beruht, scheint mir jedoch mit Hinsicht auf die Zuverlässigkeit der Resultate wie auch seiner Einfachheit halber Vorzüge zu haben.

1) R. v. Helmholtz, Die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase. Gekrönte Preisschrift. Berlin 1890 (vgl. p. 504).

2) K. Ångström, Wied. Ann. 26. p. 253. 1885.

3) K. Ångström, Acta Reg. Soc. Upsaliensis. 1886.

Die Anordnung ist aus der Fig. 5, Taf. 1 leicht verständlich. *A* und *B* sind die als Calorimeter benutzten Kupferplatten, *CDEF* die Thermoelemente, die mit ihren Löthstellen in den Mittelpunkt der Platten eingefügt sind und deren Leitungsdrähte zu dem Galvanometer führen. *GH* und *IK* sind zwei Schirme mit Oeffnungen. Vor der einen Oeffnung steht ein kleines cylindrisches Gefäß *L*, durch welches Wasserdampf geleitet werden kann, vor der anderen eine kleine Kupferplatte *M*, welche bei Zimmertemperatur erhalten wird. Die Endplatte des Cylinders *L* ist sorgfältig berusst, wie auch die Platte *M*. Die Stellung von *L* und *M* kann leicht gewechselt werden, und man bestimmt dabei genau die Zeitdifferenz *T*, während welcher die Temperaturdifferenz *K* der Calorimeter vertauscht wird.

Früher habe ich gezeigt¹⁾, dass bei dieser Anordnung, wenn eine Strahlung von der Stärke *Q* auf die Platte des Pyrheliometers fällt:

$$Qa = \frac{2KD}{Tc},$$

wenn nämlich *D* den Wasserwerth, *a* die Fläche und *c* das Absorptionsvermögen der Calorimeterplatten bedeutet. Bei einem Versuche mit der beschriebenen Anordnung war *T* = 63 Secunden, *K* = 0,0146°, *D* = 3,039 Grammc calorien. Wenn *c* = 1 gesetzt wird, finden wir:

$$Qa = 0,001409 \text{ Grammc calorien pro Secunde.}$$

Bei diesem Versuche (vgl. nebenstehende Figur) war der Abstand zwischen der strahlenden und der absorbirenden Fläche 5,7 cm, Durchmesser der Calorimeterplatten 3,02 cm. Wir können dann leicht das Strahlungsvermögen des Cylinderbodens *L* berechnen. Es sei *I* das Strahlungsvermögen des Cylinderbodens, der mit genügend grosser Genauigkeit klein im Vergleich zu der Calorimeterfläche *AA₁* angenommen werden kann, *r* der Abstand eines beliebigen Punktes der Fläche *AA₁* von *L*, *2α* der Winkel *ALL₁*, dann ist:



1) K. Ångström, l. c.; vgl. auch Wied. Ann. 39. p. 294. 1890.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLVIII.

$$Qa = \int_0^a \frac{2\pi r^2 I \sin \alpha \cos \alpha}{r^2} d\alpha = \pi I \sin^2 \alpha,$$

woraus

$$I = \frac{Qa}{\pi \sin^2 \alpha} = \frac{0,001409}{3,1416 \times \sin^2 14^\circ 50'} = 0,006848. ^1)$$

Der strahlende Cylinder wurde dann in einem Abstand = 23,65 cm vor dem Bolometer aufgestellt. Die Empfindlichkeit des Bolometers war 31,5/75 von der normalen. Die Ablenkung des Bolometergalvanometers war 40,5 Scalentheile. Wenn also R den Werth eines Scalentheiles in Grammcalthorien per Secunde und Quadratcentimeter bei normaler Empfindlichkeit bedeutet, so ist

$$R \times 40,5 = \frac{0,006848}{(23,65)^2} \times \frac{31,5}{75},$$

woraus:

$$R = 127 \times 10^{-9} \text{ Grammcalthorien per Sec. und Quadratcentimeter.} ^2)$$

Einige Controllversuche mit einem Argand'schen Brenner, der in derselben Entfernung von Bolometer und Pyrheliometer

1) Da die strahlende Fläche 1,41 qcm ist, findet man das Strahlungsvermögen der Flächeneinheit $S = 0,00486$. Nach Stefan ist das Strahlungsvermögen einer Russfläche:

$$S = \frac{1,202 \times 10^{-12}(T_1^4 - T_2^4)}{\pi} \text{ Grammcalthorien,}$$

wo T_1 und T_2 die absoluten Temperaturen der strahlenden und der absorbirenden Fläche sind. Hieraus findet man, wenn diese Temperaturen = 373 resp. 290 gesetzt werden,

$$S = 0,00458 \text{ Grammcalthorien.}$$

Die Uebereinstimmung dürfte in Anbetracht der grossen Schwierigkeiten, mit welchen die beiden Bestimmungen verbunden sind, als sehr befriedigend angesehen werden können.

2) Als Vergleich mag hier angeführt werden, dass die in dieser Weise erreichte Empfindlichkeit vier- bis fünfmal so gross ist wie diejenige, mit welcher ich früher operirt habe. Das von R. v. Helmholtz benutzte Bolometer hatte eine Empfindlichkeit von 533×10^{-9} , und er hat berechnet, dass die Empfindlichkeit des Instruments von Julius ungefähr die gleiche, die des Instrumentes von Langley fünf bis achtmal so gross ist. Die Empfindlichkeit meines Instruments kommt der von Langley's Instrument also sehr nahe. — In der vorläufigen Notiz dieser Arbeit ist infolge eines Schreibfehlers die Empfindlichkeit unrichtig angegeben.

aufgestellt wurde, ergaben eine sehr gute Bestätigung der oben erwähnten Bestimmung.

Die in der vorigen Tabelle in Bolometerablenkungen angegebene Strahlung muss also mit 127×10^{-9} multiplicirt werden, wenn man die Strahlung in Calorien per Secunde und Quadratcentimeter ausdrücken will.

2. Correction für die Reflexion der Rohrwände.

Die direct beobachtete Strahlung ist vermehrt durch die Reflexion von den Rohrwänden und vermindert durch die Reflexion von der Steinsalzplatte. Infolge vieler Nebenumstände (z. B. Stellung, Beschaffenheit und Form des Entladungsrohres) kann man nicht direct diesen Einfluss berechnen.

Ich war also genöthigt, einige Hilfsbeobachtungen anzustellen und habe den folgenden Weg einzuschlagen. Ein Rohr, Taf. V, Fig. 6, *SR*, dem Beobachtungsrohr so ähnlich wie möglich, wurde angefertigt, nur mit dem Unterschied, dass das eine Ende offen gelassen war. Das andere Ende wurde mit einer Steinsalzplatte *S* von ungefähr derselben Dicke wie die des Entladungsrohres bedeckt. In dieses Rohr konnte ein kleines cylindrisches Gefäss *G*, welches das Rohr vollständig ausfüllte, eingeschoben werden. Das Gefäss hatte, wie in der Figur zu sehen, Ab- und Zuleitung für Erwärmung durch Wasserdampf. Das Gefäss ist aus Messing, hochpolirt mit Ausnahme der nicht durchbrochenen Endflächen, die von russtem Kupfer ist.

Das Entladungsrohr wurde jetzt von seinem Platz vor dem Bolometer entfernt, um durch dieses Rohr ersetzt zu werden. Nachdem das kleine Gefäss durch Zuleitung von Wasserdampf bis zur constanten Temperatur erhitzt war, wurde es bis zu einer bestimmten Stelle schnell in das Rohr hineingeschoben und die Strahlung sogleich bestimmt. Nachdem diese Versuche für verschiedene Stellen in dem Rohre wiederholt waren, wurde das Rohr fortgenommen und die Strahlung des Gefässes bei denselben Abständen von dem Bolometergitter bestimmt. Ein Auszug aus dieser Beobachtungsreihe, welcher in der folgenden Tabelle enthalten ist, wird das Gesagte genügend erklären.

Tabelle 8.

Abstand vom Bolometer cm	Strahlung	
	mit Rohr	ohne Rohr
11,7	154	168,5
17,7	125	70,5
23,7	112	40,5
29,7	102	26,5

Wenn wir jetzt die Abstände von dem Bolometergitter als Abscissen, die correspondirenden Strahlungsintensitäten als Ordinaten nehmen, so erhalten wir zwei Curven (Fig. 7, Taf. V), die eine für die Strahlung des Gefässes mit Rohr (ausgezogen), die andere ohne Rohr (punktirt).

Es ist leicht verständlich, dass das Verhältniss zwischen den beiden Flächen, die durch die Abscissenaxe, zwei beliebige Ordinaten und die respectiven beiden Curven gebildet sind, dasselbe ist wie das Verhältniss zwischen der Strahlung einer Folge voneinander unabhängiger Gasschichten, theils mit, theils ohne Rohr. Wir finden also (vgl. Fig. 7):

$$\frac{ABCD}{AFID} = \frac{I_1}{I} = \frac{\text{Strahlung ohne Rohr}}{\text{Strahlung mit Rohr}} = \alpha,$$

oder

$$I_1 = \alpha I.$$

Das Verhältniss zwischen den beiden Flächen habe ich durch die Wägungsmethode ermittelt.

Die Länge der strahlenden Gasschicht wechselt aber ein wenig bei verschiedenen Gasen, weil der dunkle Raum um die Kathode ungleich weit in das Rohr hineindringt.¹⁾ Um die Strahlung bei verschiedenen Gasen miteinander vergleichen zu können, ist es zweckmässig, alle Bestimmungen auf dieselbe Länge der strahlenden Gasschicht zu reduciren. Ich habe als diese Länge 19 cm gewählt. Ist die Länge der Gasschicht eine andere, z. B. 17 cm, so ist die gefundene Strahlung mit dem oben gefundenen Verhältniss zwischen der Fläche ohne Rohr für den Abscissenabstand = 19 cm ($ABCD$, Fig. 7,

1) Die Länge ändert sich auch ein wenig mit der Stromstärke, doch können wir hier diese Veränderungen vernachlässigen.

Taf. V) und die Fläche mit Rohr für den Abscissenabstand = 17 cm (*AFGH*) zu multipliciren.

Folgende kleine Tabelle enthält die Reductionsfactoren für die verschiedenen Gase.

Tabelle 9.

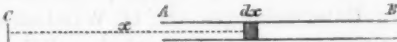
Gase	Länge der Gassäule, cm	Reductions-factor α
Wasserstoff	18,0	0,58
Stickstoff	18,2	0,57
Kohlenoxyd	17,3	0,60

Mit α ist also der früher gefundene absolute Werth der Strahlung mit Rohr zu multipliciren, wenn man die Strahlung ohne Rohr und von einer Gassäule von 19 cm Länge erhalten will. Wenn wir diese Strahlung für eine Stromstärke = 1 Mikroampère mit I bezeichnen, so ist dieselbe also (weil I_{100} die Strahlung für eine Galvanometerablenkung = 100 Scalentheile = 1,5 Mikroampère ist)

$$I = \alpha \frac{I_{100} \times 127 \times 10^{-9}}{1,5}.$$

3. Berechnung des Strahlungsvermögens und der Gesamtausstrahlung der Gase,

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, aus diesen Werthen der Strahlung unter gegebenen Bedingungen das Strahlungsvermögen der Längeneinheit der Gassäule und ihre totale Strahlung zu berechnen. Um diese zu finden, nehmen wir an, dass wir unter den hier benutzten Versuchsbedingungen die Absorption des Gases vollständig vernachlässigen können.¹⁾

Es sei AB (vgl. nebenstehende Figur) die strahlende Gassäule, C die Lage des Bolometrigitters sein.  Wenn S das Strahlungsvermögen der Längeneinheit und $CA = a$ und $CB = b$, so ist die Strahlung, welche C trifft und welche wir mit I bezeichnet haben,

1) Von der Zulässigkeit dieser Annahme habe ich mich durch directe Versuche überzeugt; sogar die Absorption des Kohlenoxyds ist unter oben erwähnten Umständen kaum mittels des Bolometers zu bestimmen.

$$I = \int_a^b S \frac{dx}{x^2}, \quad I = S \frac{b-a}{ab},$$

woraus

$$S = \frac{ab}{b-a} I.$$

Unter der Annahme, dass die Strahlung in allen Richtungen dieselbe ist, finden wir die totale Strahlung der Längeneinheit der Gassäule

$$T = 4\pi S.$$

Wenn wir in diese Ausdrücke den Werth von I einführen und dabei bemerken, dass $a = 11,5$ cm, $k = 30,5$ cm, so finden wir

$$S = \alpha \frac{I_{100} \times 127 \times 10^{-9}}{1,5} \times \frac{11,5 \times 30,5}{30,5 - 11,5},$$

und

$$T = 12,6 S.$$

S und T bedeuten also hier das Strahlungsvermögen und die Gesamtstrahlung einer Gassäule von 1 cm Länge und von einem Querschnitte von 1,41 qcm (= Querschnitt des Entladungsrohres) beim Durchgange eines Stromes = 1 Mikroampère.

Da die Strahlung der Stromstärke proportional ist und das Potentialgefälle im positiven Lichte vom Querschnitte des Entladungsrohres unabhängig ist, könnte man wohl annehmen, dass auch die Strahlung vom Querschnitte des Entladungsrohres unabhängig sei. Wenn dem so ist, dann könnten wir ganz einfach sagen, dass S und T das Strahlungsvermögen und die Gesamtstrahlung einer Gassäule von der Länge 1 ist, wenn durch dieselbe 1 Mikroampère geleitet wird und zwar ohne Rücksicht auf den Durchmesser der Gasschicht. Nach den Untersuchungen von G. Wiedemann¹⁾ über die Wärmeentwicklung in Geissler'schen Röhren ist dieselbe beinahe von dem Querschnitte unabhängig. Wie ich schon hervor gehoben habe, können wir jedoch nicht von der Wärmeentwicklung auf die Verhältnisse der Strahlung schliessen. Die leider allzu spärlichen Versuche von Staub²⁾ über das

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 158. p. 35 und 252. 1876.

2) G. Staub, Inauguraldissert. p. 41. Zürich 1890.

Verhältniss zwischen Lichtstrahlung und Gesamterwärmung bei Flaschenentladungen scheinen übrigens deutlich die Abhängigkeit dieses Verhältnisses von dem Rohrdurchmesser zu zeigen. Die Versuchsbedingungen, unter welchen Hr. Staub gearbeitet hat¹⁾ (Entladungen von grösseren Condensatoren), sind jedoch so wesentlich von den meinigen verschieden, dass man wohl nicht ohne weiteres die Untersuchungen vergleichen kann. Was meine eigenen Untersuchungen betrifft, so lassen dieselben die Frage auch noch offen. Wohl habe ich in verschiedenen Röhren immer dasselbe Verhältniss zwischen Licht- und Gesamtstrahlung bei derselben Spannung des Gases gefunden, der Unterschied in den Durchmessern der Röhre ist jedoch zu unbedeutend, um bestimmte Schlussfolgerungen über diese Frage zu erlauben. Eine neue Untersuchung mit Röhren von ganz verschiedenem Durchmesser scheint demzufolge in hohem Grade wünschenswerth.

Die folgenden Tabellen enthalten S und T_s aus den Tabellen 3—5 berechnet und ebenso die entsprechenden Werthe L und T_l für die durch eine Alaunplatte durchgegangene Strahlung.

Tabelle 10.

Wasserstoff.

Druck mm	Potential- gefälle Volt p. cm	S $\times 10^{-6}$	T_s 10^{-5}	L 10^{-6}	T_l 10^{-5}	T_s $V. i/4,2$
0,12	12	3,4	4,2	2,0	2,5	0,015
0,15	13	3,8	4,7	—	—	0,015
0,16	13	2,9	3,6	1,8	2,3	0,012
0,18	13	3,7	4,6	1,4	1,7	0,015
0,23	15	3,4	5,4	—	—	0,015
0,42	19	5,1	6,3	—	—	0,014
0,56	22	4,0	5,0	1,6	2,0	0,010
0,76	24	5,4	6,7	1,3	1,6	0,012
0,90	25	5,8	7,2	—	—	0,012
1,02	26	6,0	7,5	1,6	2,0	0,013
1,26	27	5,0	6,2	1,2	1,5	0,010
1,60	29	3,8	4,7	1,1	1,4	0,007
2,30	33	2,4	2,9	0,8	1,0	0,004
2,66	35	2,4	2,9	0,7	0,9	0,003

1) Der Verf. hat weder die Capacität der Condensatoren, noch die Potentialhöhe, bis zu welcher dieselben geladen wurden, angegeben, was doch den Werth seiner Untersuchungen bedeutend erhöht haben würde.

Tabelle 11.
Stickstoff.

Druck mm	Potential- gefälle Volt p. cm	S 10^{-6}	T_s 10^{-5}	L 10^{-6}	T_l 10^{-5}	T_s $V \cdot i/4,2$
0,12	14	19,9	24,8	15,2	18,9	0,074
0,15	15	18,6	23,2	17,9	22,0	0,065
0,16	15	18,7	23,6	16,9	21,0	0,066
0,23	17	19,2	23,9	16,2	20,1	0,059
0,35	21	19,6	24,4	16,5	20,6	0,049
0,42	23	21,3	26,5	17,2	20,5	0,048
0,57	28	23,9	29,0	18,6	23,1	0,045
0,66	30	25,7	32,0	21,3	26,7	0,045
0,70	32	26,5	33,0	20,3	25,4	0,043
0,72	33	24,4	30,4	18,3	22,9	0,039
0,88	37	26,4	32,9	18,8	23,4	0,037
1,00	42	28,9	36,0	21,5	26,9	0,036
1,10	45	29,3	36,5	18,2	22,7	0,034
1,15	47	26,8	33,4	19,2	24,0	0,030
1,21	49	31,8	39,7	22,2	27,7	0,034
1,45	61	30,2	37,6	16,9	21,0	0,026
1,54	62	29,7	36,0	20,6	25,6	0,024
1,62	65	27,4	34,2	18,8	23,4	0,022
1,64	66	33,3	41,5	22,6	28,3	0,026

Tabelle 12.
Kohlenoxyd.

Druck mm	Potential- gefälle Volt p. cm	S 10^{-6}	T_s 10^{-5}	L 10^{-6}	T_l 10^{-5}	T_s $V \cdot i/4,2$
0,14	15	8,9	11,1	4,1	5,2	0,032
0,18	17	9,3	11,6	5,3	6,6	0,029
0,29	21	10,3	12,8	4,0	5,0	0,026
0,32	22	11,6	14,3	4,1	5,2	0,027
0,46	28	9,7	12,2	3,3	4,1	0,018
0,59	32	10,1	12,6	3,2	4,0	0,017
0,74	38	8,6	10,8	3,0	3,8	0,012
0,77	39	12,8	15,7	3,1	3,9	0,017
0,99	47	11,0	13,7	3,0	3,8	0,012
1,62	66	14,5	18,1	2,0	2,6	0,012

Die Resultate sind graphisch dargestellt auf der Taf. V, Fig. 8, 9 und 10; als Abscissen sind die Drucke, als Ordinaten T_s (die punktirte Curve) und T_l (die ausgezogene Curve) genommen. Die Gesamtstrahlung nimmt mit zunehmendem Drucke bei Stickstoff und Kohlenoxyd langsam zu. Bei Wasserstoff finden wir für einen Druck von ca. 1 mm ein Maximum,

das wohl aller Wahrscheinlichkeit nach von einem Minimum begleitet wird.

Die Intensität der Strahlung verschiedener Gase steht in keiner erkennbaren Beziehung zu den Potentialgefällen in denselben. Mit Kenntniss der Stromstärke und der Potentialgefälle können wir die Arbeit berechnen, die den verschiedenen Gasen bei dem Stromdurchgange zugeführt wird. Das Verhältniss zwischen der Gesamtausstrahlung und dieser Arbeit, in Grammcalthorien ausgedrückt, habe ich berechnet und in der letzten Columnne der obigen Tabelle aufgeführt. Diese Columnne enthält also

$$\frac{T_s}{V i / 4,2},$$

oder die Gesamtausstrahlung bei derselben Stromarbeit per Längeneinheit des Entladungsrohres. Hieraus folgt nun, dass nur ein ganz beschränkter Theil der in der positiven Strombahn geleisteten Arbeit in Strahlung umgesetzt wird, weiter dass dieser Theil bei verschiedenen Gasen verschieden ist und schliesslich, dass derselbe im allgemeinen um so kleiner ist, je grösser die Spannung des Gases. Den übrigen Theil der Arbeit, welcher nicht in Form von Strahlung abgegeben wird, finden wir ohne Zweifel, zum grössten Theil wenigstens als Wärme wieder.¹⁾ Ein relatives Maass dieser Wärmeentwicklung in verschiedenen Gasen gibt uns die Strahlung der erwärmten Rohrwände in unseren oben angeführten Versuchen, sobald nämlich der Strom solange gewirkt hat, dass die Strahlung constant ist. Obschon eine genaue Bestimmung dieser Wärme nicht die Aufgabe vorliegender Untersuchung war, mögen doch die folgenden Zahlen angeführt werden, um eine ungefähre Vorstellung des relativen Werthes dieser Strahlung zu geben. Die kleine Tabelle 13 enthält also in der letzten Columnne die Strahlung der Rohrwände allein nach längerem Durchgange eines Stromes von 100 Scalentheilen (= 0,0015 Amp.) und zwar bei ungefähr gleichem Potentialgefälle in der positiven Strombahn. Zum Vergleich führe ich auch die Strahlung der Gase allein an, diese aus den Tabellen 3—5 genommen.

1) Es ist jedoch möglich, dass ein Theil der Arbeit für moleculare Umwandlungen in Anspruch genommen wird, und dass die entsprechenden Wärmemengen nicht in der positiven Strombahn wiederzufinden sind.

Tabelle 13.

Gas	Druck	Potential- gefälle Volt per cm	Gesamt- strahlung I_{100}	Strahlung der Rohr- wände W_{100}
Wasserstoff	1,60	29	4,2	30
Sauerstoff	1,27	31	0—1,4	24
Stickstoff	0,66	30	28,7	33
Kohlenoxyd	0,59	32	10,8	28

Aus diesen Zahlen, welche, wie gesagt, keine grössere Genauigkeit beanspruchen, geht doch hervor, dass die Erwärmung verschiedener Gase bei gleicher Stromarbeit ungefähr dieselbe ist. Wir sehen also, dass die Strahlung nicht eine nothwendige Folge der Wärmeentwicklung ist. Die letzte steht ohne Zweifel in enger Beziehung zu der Stromarbeit, die erste dagegen nicht.

VII. Einige theoretische Bemerkungen.

Es ist schon durch andere Arbeiten, durch die Untersuchungen von Hittorf¹⁾ u. a., bekannt, dass Entladung durch Gase ohne Lichtentwicklung möglich ist. Die vorliegende Untersuchung zeigt uns aber, dass die Erklärung dieses Verhältnisses in den meisten Fällen darin zu suchen ist, dass mit der Zunahme der Spannung der Gase die Strahlung unsichtbar wird, so z. B. bei Wasserstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd. Sauerstoff gibt uns jedoch ein Beispiel von Stromdurchgang bei schwacher Spannung, die von einer verhältnissmässig sehr schwachen Strahlung begleitet ist.

Alles dies zeigt uns, dass die Strahlung der Gase bei electricischer Entladung nicht nur in qualitativer, sondern auch in quantitativer Beziehung von der molecularen Beschaffenheit der Gase abhängig und dass sie als eine secundäre Wirkung des electricischen Stromes zu betrachten ist. Bei dem Stromdurchgang wird eine nicht unbedeutende Arbeit in Wärmebewegung umgewandelt. Ein wie grosser Theil dieser Arbeit in Strahlung umgesetzt wird, hängt von der Fähigkeit der Moleküle ab, solche Schwingungszustände anzunehmen, welche Strahlung hervorbringen.

Wenn wir uns eine Vorstellung von den inneren Vorgängen der Strahlung der Gase bei electricischer Entladung machen wollen,

1) Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 112. 1884.

können wir von zwei grundverschiedenen Ansichten ausgehen: entweder alle Molecüle in der Gasmasse oder nur eine beschränkte Anzahl derselben nehmen an der Strahlung theil (im ersten Falle ist das Gas homogen, im letzteren heterogen).

Wenn die Strahlung bei der Entladung durch eine über die Molecüle hingehende Bewegung hervorgerufen wird und alle Molecüle an der Strahlung theilnehmen¹⁾, so muss man, weil die mittlere Temperatur des Gases dabei sehr niedrig sein kann²⁾ ein ganz besonderes Verhältniss zwischen der translatorischen und vibratorischen Bewegung der Molecüle annehmen. Die Strahlung, welche nur von der letztgenannten herrührt, ist mithin nicht durch die Temperatur allein bedingt. Von diesem Standpunkte aus betrachtet unterliegt es keinem Zweifel, dass die Strahlung als irregulär (nach R. v. Helmholtz) oder als eine Art von Luminescenz (E. Wiedemann) zu betrachten ist.

Wenn dagegen die Electricitätsüberführung durch Convection (G. Wiedemann) oder durch eine Art Electrolyse (Schuster, J. J. Thomson, Arrhenius u. a.) vermittelt wird, so kann die Anzahl der Molecüle, die die Leitung herstellen, sehr gering sein.³⁾ Die mittlere Temperatur des Gases kann dann sehr niedrig sein und demungeachtet kann der Bewegungszustand der activen Molecüle einer sehr hohen Temperatur entsprechen. Wenn wir nun unter irregulärer Strahlung eine solche verstehen, welche nicht ausschliesslich durch Erwärmung des ganzen Körpers hervorgebracht werden kann, dann ist auch diese Strahlung natürlich von irregulärer Natur. Verstehen wir aber unter irregulärer Strahlung eine derartige, dass in ihr die spectrale Vertheilung der Energie eine anomale ist, dann müssen wir, um beurtheilen zu können, ob die Strahlung bei Gasentladung regulärer oder irregulärer Natur sei, erst die spectrale Vertheilung der regulären Strahlung bei schwacher Spannung und hoher Temperatur kennen. Dies ist aber nicht der Fall, und unsere Schlüsse sind demzufolge nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse. Für eine irreguläre Strahlung in

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **37**. p. 187—188. 1889.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6**. p. 298. 1879 und **10**. p. 202. 1880;
B. Hasselberg, Mém. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Petersburg. **27**.
Nr. 1. 1879.

3) Schuster, Proc. of the Roy. Soc. **47**. p. 526. 1890.

dem zuletzt angeführten Sinne sprechen aber folgende That-
sachen, welche wir hier gefunden haben.

1. Die Strahlung steht in keiner Beziehung zu dem Absorptionsvermögen des Gases bei gewöhnlicher Temperatur. Wenn auch das Absorptionsvermögen sich mit der Temperatur ändert, so sind doch nicht so grosse Veränderungen zu erwarten, wie die oben gefundenen Verhältnisse bei Kohlenoxyd und Stickstoff es nothwendigerweise verlangen.

2. Die Strahlung, welche z. B. bei Stickstoff bei ca. 2 mm Spannung reich an dunklen Strahlen ist, ändert mit abnehmen-
der Spannung schnell ihre Beschaffenheit und besteht bei einem Drucke von 0,1 mm beinahe ausschliesslich aus Licht-
strahlung. Diese schnelle und doch stetige Veränderung der Zusammensetzung der Strahlung kann wohl nur durch die Annahme anomaler Strahlungsverhältnisse erklärt werden.

Die Erklärung der gefundenen Thatfachen scheint mir übrigens nur durch die Annahme möglich, dass die Strahlung des Gases bei electricischer Entladung aus zwei Theilen besteht, der eine regulärer, der andere irregulärer Natur; mit abnehmender Spannung nimmt der erste ab, die irreguläre Strahlung nimmt dagegen um so mehr zu, je weniger die Bewegungen durch die Gasmasse gedämpft werden. Durch diese Annahme erklärt sich nicht nur die Veränderung in der Zusammensetzung der Strahlung bei vermindertem Drucke, sondern auch das bei Wasserstoff und wahrscheinlich auch bei Stickstoff vorkommende Minimum der Gesamtstrahlung (bei ca. 2 mm Druck).

Die beiden oben angeführten Theorien über die Natur der Entladung durch Gase dürften also zu derselben Annahme in Bezug auf die anomale Natur der Strahlung führen. Versuchen wir aber die näheren Umstände, die wir hier gefunden haben, nach den beiden Theorien klar zu stellen, so scheint es mir, dass, wenn wir auch nicht entschiedene Beweise für oder gegen die eine oder die andere Theorie vorbringen können, die Vorgänge doch am leichtesten durch die Annahme einer Electricitätsüberführung durch eine zu der Stromstärke proportionalen Anzahl von Molecülen erklärt werden können.

Bei constantem Drucke wird in jedem Molecüle ein bestimmter Theil der Energie in Strahlung umgesetzt; wird die Stromstärke vermehrt, so nimmt die Zahl der activen Molecüle

und damit auch die Strahlung in einem zur Stromstärke proportionalen Verhältniss zu. Weil die Zahl der activen Moleküle relativ klein ist, können wir die Dämpfungsverhältnisse als constant betrachten und die Zusammensetzung der Strahlung bleibt demzufolge bei Vermehrung der Stromstärke beinahe unverändert. Vermehrt man dagegen den Druck des Gases, so ändern sich deutlich die Dämpfungsverhältnisse, die anomale Strahlung wird dann leichter in eine normale umgesetzt und die Strahlung wird reicher an ultrarothern Strahlen. Ein grösserer Theil der zugeführten Energie wird für die Erwärmung benutzt, und für eine und dieselbe Stromarbeit nimmt die Gesamtstrahlung mit zunehmendem Drucke ab.

Nehmen wir dagegen an, dass das Gas als eine homogene Masse an der Strahlung Theil nimmt, so scheint es wohl auch hier keine Schwierigkeiten darzubieten, die Proportionalität der Gesamtstrahlung und der Stromstärke bei constantem Drucke zu erklären. Wir werden aber, um die Unabhängigkeit der Zusammensetzung der Strahlung von der Stromstärke, bei constantem Drucke erklären zu können, zu der Annahme genöthigt, dass bei einer Vermehrung der Energie der Gesamtstrahlung, doch das Verhältniss zwischen den Intensitäten der verschiedenen Schwingungsperioden oder also den Intensitäten der verschiedenen Strahlungsgattungen immer dasselbe bleibt, eine Annahme, die jedoch nicht mit dem übereinstimmt, was wir übrigens von den qualitativen Veränderungen der Strahlung homogener Körper bei einer Zunahme der Intensität der Strahlung (durch eine Temperaturerhöhung) wissen.

Wie gesagt, lässt sich jedoch, so viel ich es übersehe, die Frage über die Natur der Entladung aus den gewonnenen Resultaten nicht definitiv entscheiden. Zu diesem Zwecke sind ohne Zweifel die Versuche zu gering an Zahl und zum Theil auch zu ungenau, wozu kommt, dass einige wichtige Fragen, z. B. über den Einfluss des Rohrdurchmessers, nicht in dieser Untersuchung berücksichtigt worden sind.

IX. Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

Um die Uebersicht der gewonnenen Resultate zu erleichtern, stelle ich die wichtigsten zusammen, dabei ausdrücklich bemerkend, dass dieselben natürlich nur eine definitive

Bedeutung unter den oben näher angegebenen Versuchsbedingungen haben.

1. Für ein bestimmtes Gas und eine bestimmte Spannung ist die Strahlung des positiven Lichtes proportional der Intensität des electricischen Stromes.

2. Bei einem und demselben Gase und für eine bestimmte Spannung ist die Zusammensetzung der Strahlung constant und unabhängig von der Stromstärke.

3. Wenn die Spannung des Gases vergrössert wird, nimmt die Gesamtstrahlung für dieselbe Stromstärke in der Regel zu, bei schwachem Drucke aber zuerst langsam, dann schneller; gleichzeitig ändert sich auch die Zusammensetzung der Strahlung insofern, als das Verhältniss zwischen der Intensität der Strahlung kürzerer Wellenlängen zur Intensität der Gesamtstrahlung abnimmt. Die Intensitätsvertheilung im Spectrum ändert sich also, indem mit abnehmender Spannung die Intensität der Strahlung kürzerer Wellenlängen verhältnissmässig zunimmt.

4. Das Verhältniss zwischen der Intensität der Gesamtstrahlung und der Stromarbeit nimmt mit abnehmender Spannung des Gases stetig zu.

5. Der optische Nutzeffect der Strahlung (hier durch das Verhältniss der Intensität der durch die Alaunplatte hindurchgegangenen Strahlen zu der Intensität der Gesamtstrahlung angegeben) ist bei niedriger Spannung für einige Gase sehr gross (ca. 0,90 Proc. für Stickstoff); der optische Nutzeffect der geleisteten Arbeit ist dagegen nicht besonders gross (ca. 8 Proc. für Stickstoff von 0,1 mm Druck).

6. Die Stärke der Gesamtstrahlung ist als eine secundäre Folge der Entladung zu betrachten und hängt von der molecularen Beschaffenheit des Gases ab.

7. Von welcher Ansicht über die Natur der Gasentladung man auch ausgeht, scheint diese Untersuchung die Annahmen von Hittorf, E. Wiedemann und anderen zu bestätigen in sofern, als die Strahlung keine reine Function der Temperatur der Gase ist, sondern als eine anomale („irreguläre“, „Luminescenz“) zu betrachten ist.

Upsala, Dec. 1892.

VII. *Bestimmung des Brechungsexponenten für Flüssigkeiten durch Spiegelablesung mit Fernrohr und Scala; von H. Ruoss.*

Hr. Zenger¹⁾ hat eine Bestimmung des Brechungsexponenten durch lineare Messungen ohne Theilkreis angegeben, welche die Winkel auf 3" und den Exponenten auf 5 Decimalen genau anzugeben gestattet. Bei dieser Bestimmung wird ein Glasprisma vor den Spalt eines Dunkelzimmers aufgestellt, durch den Spalt fällt Licht ein, welches in der Entfernung $x = 3$ m auf einer Scala ein Spectrum erzeugt. Will man den Brechungscoefficienten etwa der Linie B des Spectrums bestimmen, so stellt man das Prisma so am Spalte auf, dass der Lichtstrahl B Minimalablenkung erfährt (Fraunhofer'sche Stellung); hierauf stellt man es so, dass der einfallende Strahl senkrecht zur Prismenfläche auffällt (Meyerstein'sche Stellung).

In beiden Stellungen werden die Abstände y der Linie B von demjenigen Punkt der Scala bestimmt, welcher durch das ungebrochene Licht des Spaltes auf der Scala getroffen wird. Die Ablesungen geschehen auf 0,1 mm mit einem längs der Scala verschiebbaren Fernrohr. Die Winkel werden aus $\operatorname{tg} w = y/x$ bestimmt.

Die beiden Stellungen geben zwei Gleichungen für den Brechungsexponenten n und den brechenden Winkel φ des Prismas; ermöglichen also die Bestimmung von n .

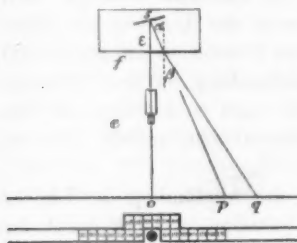
Wir müssen hier beifügen, dass bei der Bestimmung von w Fehler bis zu mehreren Minuten begangen werden können, da für beide Stellungen die Scheitel der Winkel w im allgemeinen nicht im Spalt liegen. Um diese Fehler zu vermeiden, muss man die Spitze dieser Winkel in den Spalt bringen, indem man Strahlen betrachtet, welche an der Kante des brechenden Winkels auffallen und nicht innerhalb der Seitenfläche des Prismas.

1) Zenger, Compt. rend. 99. p. 377—380. 1884.

Hr. Feussner¹⁾ bestimmt mit Hülfe zweier Scalen und Fernrohr den Winkel und Brechungsexponenten von Prismen. Auf das Fernrohr wird ein eigens hierzu construirtes Rohr aufgesetzt, welches zwei Spiegel trägt, von denen der eine in die Axe des Fernrohrs fällt, während der andere eine Neigung gegen diese Axe besitzt.

Der Brechungsexponent wird mit der Minimalablenkung bestimmt. Bezüglich des Einzelnen verweisen wir auf die Abhandlung selbst.

Zu meinen Versuchen ist ein kleines Gefäß nothwendig, das auf einer Seitenfläche f (vgl. Fig.) durch eine planparallele Platte abgeschlossen ist. Im Gefäß befindet sich ein Spiegel s , der um eine verticale Axe drehbar ist. Diese Axe ist mit



einer Justirvorrichtung versehen, welche dazu dient, den Spiegel parallel zur Platte f zu stellen.

Senkrecht zur Platte wird ein Fernrohr mit Gauss'schem Ocular horizontal aufgestellt und in einer Entfernung von etwa 4 m eine 3 m lange Scala parallel der Platte.

Füllt man das Gefäß so weit mit Wasser, dass der Spiegel etwa zur Hälfte im Wasser steht, so sieht man im Fernrohr einen Scalenstrich im oberen von Luft umgebenen Spiegeltheil, und einen anderen Scalenstrich im unteren von Wasser umgebenen Spiegeltheil. Sind p und q die Entfernungen der Scalenstriche von demjenigen Punkt O der Scala, welcher in der Fernrohraxe liegt, so ergibt sich aus:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{e + \varepsilon} \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{q - \varepsilon \operatorname{tg} \alpha}{e} \\ n = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \end{array} \right.$$

der Brechungsexponent.

1) Feussner, Sitzungaber. d. Gesellsch. z. Bef. d. ges. Naturw. Marburg p. 65—76. 1888.

Das Fernrohr und der Spiegel haben die richtige Lage, wenn:

1. bei der Einstellung des Fernrohres auf Unendlich das seitlich beleuchtete Fadenkreuz mit seinen zwei Reflexionsbildern dem in der Platte f und dem im Spiegel coincidirt;
2. die Spiegelaxe mit dem verticalen Faden des Fadenkreuzes zusammenfällt. Durch Justirung der Axe und Verschiebung des Fernrohres wird dieses erreicht.

Damit die Hälfte jedes abzulesenden Scalentheilstreiches im Wasser und in der Luft gesehen wird, muss die Mittellinie der Scala annähernd in die Horizontalebene des horizontalen Fadens fallen. Da sich bei einer so aufgestellten Scala der Theilstrich O im Fernrohr nicht sehen lässt, so bringt man im Nullpunkt O einen Aufsatz an, auf welchen dieser Theilstrich verlängert wird.

Bringt man die Scala wie bei der gewöhnlichen Spiegelablesung direct über dem Fernrohr an, so muss dieselbe in der Nähe des Nullpunktes O einen Ausschnitt und Aufsatz besitzen (vgl. Fig.), damit sie reiterförmig aufgesetzt werden kann. Für die Vergrößerung ist es indessen vortheilhafter, das Fernrohr näher am Spiegel aufzustellen, als die Scala.

Die Scala hat die richtige Lage:

1. wenn sie horizontal steht;
2. wenn das Bild des Theilstriches Null im Spiegel oder auf der Platte f mit dem verticalen Faden coincidirt;
3. wenn das Loth in O auf der Scala durch die Spiegelaxe geht.

Diese Bedingungen werden durch Probiren sehr leicht erreicht, ebenso die Bedingung, dass das Scalenbild annähernd in die Mitte des Gesichtsfeldes fällt. Was die Bedingung 3 anlangt, so kann man in O eine Reisschiene an die Scala anlegen und längs derselben visiren. ϵ wird direct gemessen vom Spiegel bis zur Vorderfläche der Platte f ; e von dieser Vorderfläche bis zur Scala.

Correction.

Durch die Platte f erleiden die Strahlen eine kleine Verschiebung. Ist n und α auf die angegebene Weise aus den

Gleichungen (1) bestimmt, und ist die Dicke der Platte δ , ν ihr Brechungcoefficient, so erhält man als Verschiebungen:

$$(II) \quad \begin{cases} \Delta p = \delta \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi), \text{ wo } \sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\nu} \\ \Delta q = \delta \cdot (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \psi), \text{ wo } \sin \psi = \frac{n}{\nu} \sin \alpha. \end{cases}$$

Diese Werthe sind zu den abgelesenen p und q zu addiren und dann geben die Formeln (I) mit diesen neuen Werthen von p und q das richtige n .

Bei dem weiter unten angeführten Beispiel waren die Correctionen in q gleich Null zu setzen; die in p 0 bis 0,1 mm.

Ablesungen, bei denen das Flüssigkeitsbild des Scalenstriches bei nicht homogenem Licht noch deutlich (nicht verschwommen) ist, sind werthlos, da die Dispersion zu klein ist, um ein genaues n zu geben.

Man nehme daher Ablesungen von möglichst grossem p . Bei homogenem Licht kann man einen schwarzen, auf der Scala bewegbaren Schieber so weit verschieben, bis seine Grenzlinie mit dem verticalen Faden coincidirt; dadurch ist auch bei ganz ungünstiger Beleuchtung ein genaues Ablesen möglich. Da bei $e = 4$ m 1" einen Bogen von 0,019 mm gibt, so erlaubt die Methode bei Ablesungen auf 0,1 mm eine Genauigkeit der Winkelangaben auf 5".

Da ferner im Maximum die Fehler dp und dq gleich 0,1 mm, so ergibt sich im Maximum

$$dn = \frac{1}{e \cdot 10\,000 \cdot \sin \alpha} [\cos^3 \beta \pm n \cos^3 \alpha],$$

also

$$dn < \frac{\cos^3 \alpha (1 + n)}{e \cdot 10\,000 \cdot \sin \alpha},$$

wobei e in Metern ausgedrückt ist.

Dieser Ausdruck nimmt mit wachsendem α ab. Für $\alpha = 15^\circ$ resp. 30° und $n = \frac{4}{3}$, $e = 4$ wird z. B.: $dn < 0,000203$ resp. $dn < 0,000075$, sodass für $\alpha = 15^\circ$ der mittlere Fehler der Einzelmessung kleiner als 0,000101.

Die Methode hat aber ausser dieser grossen Genauigkeit noch den Vortheil, dass man nicht bloss zwei Bestimmungen (wie bei den anderen Methoden), sondern beliebig viele mit verschiedenen Brechungswinkeln durchführen kann, indem man dem Spiegel verschiedene Drehungen ertheilt.

Für Wasser von 22,9° C. und Natriumlicht ergab sich für fünf Beobachtungen nach Durchführung der an ihnen vorzunehmenden Correction:

p 781,5 699,4 750,2 779,3 800,5

q 1056,2 942,3 1012,4 1053,1 1082,8.

Dabei war $e = 3817,5$ mm und $\varepsilon = 33,5$ mm.

Hieraus ergab sich als mittlerer Werth

$$n = 1,33\,276,$$

als mittlerer Fehler der Einzelmessung resp. des Mittels

$$0,00\,011 \text{ resp. } 0,00\,005,$$

und als wahrscheinlicher Fehler des Mittels 0,00 003.

Der obige Werth für n stimmt bis zur vierten Decimale mit dem von Hrn. B. Walther¹⁾ überein.

Stuttgart, Phys. Inst. der techn. Hochschule, Dec. 1892.

1) B. Walther, Wied. Ann. 46. p. 423. 1892.

VIII. Ueber die Beziehung der Dielectricitätsconstanten zum optischen Brechungsexponenten; von P. Drude.

(Nach den Gött. Nachr. 1893, Nr. 2 mitgetheilt.)

Der Satz, dass der optische Brechungsexponent eines Körpers gleich der Quadratwurzel aus seiner Dielectricitätsconstante ist, findet bekanntlich bei den meisten Körpern keine Bestätigung, schon allein wegen des Auftretens der Dispersion. In neuerer Zeit sind nun von Koláček¹⁾, Goldhammer²⁾, Ebert³⁾ und v. Helmholtz⁴⁾ die electromagnetischen Gleichungen auch auf die Dispersionserscheinungen erweitert, sodass der obengenannte Satz auch theoretisch nicht mehr bestehen bleibt.

Für Körper mit normaler Dispersion hat sich die Dispersionsformel

$$(1) \quad n^2 = -A T^2 + B + \frac{C}{T^2} + \frac{D}{T^4}$$

als sehr brauchbar bewiesen.⁵⁾ Es bedeutet n den Brechungsexponenten (gegen den leeren Raum), T die Schwingungsdauer des Lichtes, A, B, C, D sind positive Coefficienten. B charakterisirt den ungefähren Werth von n^2 innerhalb des sichtbaren Spectrums, und diese Grösse ist vorzugsweise mit der Dielectricitätsconstanten verglichen. Es zeigt sich nun, dass B höchstens annähernd gleich, aber nie grösser als die Dielectricitätsconstante ϵ ist.

Wenn man in den verschiedenen Theorien der Dispersion (auch in den mechanischen) nach dem Grunde dieser Thatsache forscht, so erkennt mau leicht, dass sie durch die im Ultraroth liegenden Absorptionsgebiete verursacht wird. Diese machen auch eine Extrapolation des optischen Brechungsexponenten auf unendlich langsame Schwingungen unmöglich,

1) F. Koláček, Wied. Ann. **32**. p. 224, 429. 1887; **34**. p. 673. 1888.

2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **47**. p. 93, 1892.

3) H. Ebert, Wied. Ann. **48**. p. 1. 1893.

4) H. v. Helmholtz, Berl. Ber. Dec. 1892 p. 1.

5) Vgl. E. Ketteler, Theoret. Optik, Braunsch. p. 547. 1885.

wie neuerdings Ketteler¹⁾ nach seiner und von d. v. Helmholtz'schen mechanischen Theorie nachwies.

Wenn daher auch wohl die Ursache für die Abweichung des optischen Brechungsexponenten von der Dielectricitätsconstanten klar zu Tage liegt, so möchte ich im Folgenden doch noch etwas näher auf diesen Punkt eingehen, um zu zeigen, in welcher bestimmter und einfacher Weise jene Abweichung mit gewissen Vorstellungen der mechanischen und electromagnetischen Dispersionstheorie verknüpft ist.

Ich beginne mit der mechanischen Theorie von v. Helmholtz, weil sie die Form der Ausgangsgleichungen in der bestimmtesten und mechanisch anschaulichsten Weise liefert.

I. Mechanische Theorie.

Bezeichnet u die Elongation der Aethertheile aus der Ruhelage, U die der ponderablen Theile (Moleküle), so bestehen nach v. Helmholtz²⁾ für ebene Wellen, welche sich nach der z -Axe fortpflanzen, die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - U),$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\gamma U - \delta \frac{\partial U}{\partial t} + \beta'(u - U).$$

Die Gleichungen sind auf die Masseneinheit des Aethers und der Moleküle bezogen. Bezeichnet man daher die Reaktionskraft zwischen Aether und Molekülen mit R , so muss sein

$$\beta m(u - U) = \beta' M(u - U) = R,$$

d. h.

$$(3) \quad \beta : \beta' = M : m,$$

falls m die Dichte des Aethers bedeutet, M die Dichte des Antheils der Materie, welche durch die Lichtschwingungen mit in Bewegung versetzt wird.

Die Gleichung (2) lehrt, dass die Moleküle, falls sie sich ohne Reibung bewegen könnten ($\delta = 0$) und der Aether in Ruhe verbliebe ($u = 0$) eine Eigenschwingung besitzen von der Dauer

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\beta' + \gamma}.$$

1) E. Ketteler, Wied. Ann. 46. p. 572. 1892.

2) H. v. Helmholtz, Berl. Ber. 1874. p. 667.

Man setze zur Integration:

$$(4) \quad \begin{cases} u = A e^{-kz} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) & = \Re \left[A e^{\frac{i}{\tau} (t - \pi z)} \right], \\ U = A' e^{-kz} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \Delta \right) & = \Re \left[B e^{\frac{i}{\tau} (t - \pi z)} \right], \end{cases}$$

wobei das vorgesetzte \Re bedeutet, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse genommen werden soll und wobei A und $1/\tau = 2\pi/T$ reell sind, während für die complexen Grössen π und B die Beziehungen bestehen:

$$(5) \quad \begin{cases} \pi = p - i p', & p = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{V}, & p' = \tau k, \\ B = \mathfrak{A} + i \mathfrak{A}', & \mathfrak{A} = A' \cos 2\pi \Delta, & \mathfrak{A}' = A' \sin 2\pi \Delta. \end{cases}$$

V bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Körper.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$(6) \quad a \pi^2 = 1 - \beta \tau^2 + \frac{\beta \beta' \tau^2}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2} + i \frac{\delta}{\tau}},$$

wobei $\tau_1 = T_1/2\pi$, d. h.

$$(7) \quad \tau_1^2 = \frac{1}{\beta' + \gamma}.$$

Trennt man das Reelle vom Imaginären, so gewinnt man aus (6)

$$(8) \quad \begin{cases} a(p^2 - p'^2) = 1 - \beta \tau^2 + \beta \beta' \tau^2 \frac{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2} \right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}, \\ 2 a p p' = \frac{\beta \beta' \delta \tau}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2} \right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}. \end{cases}$$

Wir wollen sehen, ob diese Gleichungen mit der nach der electromagnetischen Theorie nothwendigen Bedingung verträglich sind, dass für unendlich grosses τ , p einen endlichen Grenzwert annimmt, während k einen sehr kleinen Werth (oder Null) erreicht. Diese Körper würden electriche Isolatoren sein.

Die Gleichungen (8) ergeben, wenn man die erste der-

selben nach Potenzen von τ entwickelt und die Entwicklung mit dem zweiten Gliede abbricht:

$$a(p - p'^2) = \tau^2 \beta (\tau_1^2 \beta' - 1) + 1 + \beta \beta' \tau_1^4 (1 + \delta^2 \tau_1^2),$$

$$2 a p p' = \tau \beta \beta' \delta \tau_1^4.$$

Hieraus folgt für p^2 die Gleichung:

$$a p^2 - \frac{\tau^2 \beta^2 \beta'^2 \delta^2 \tau_1^8}{p^8 4 a} = 1 + \beta \beta' \tau_1^4 (1 + \delta^2 \tau_1^2) + \tau^2 \beta (\tau_1^2 \beta' - 1).$$

Zur Erfüllung dieser Gleichung bieten sich zwei Möglichkeiten: Entweder man setzt die Factoren von τ^2 auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich. Dann würde p^2 (also auch n^2) unendlich klein werden, falls die Reibung δ zu Null abnimmt. Dieses Verhalten ist unwahrscheinlich. Oder man bestimmt p^2 dadurch, dass man die von τ unabhängigen Glieder obiger Gleichung einander gleich setzt. Es muss dann eine bestimmte Relation zwischen den Constanten β , β' , δ , τ_1 , a stattfinden, damit auch die Glieder der Gleichung, welche mit τ^2 multiplicirt sind, einander gleich werden. Dies Verfahren liefert, falls man $\delta^2 \tau_1^2$ gegen 1 vernachlässigt, was bei kleiner Reibung gestattet sein wird:

$$a p^2 = 1 + \beta \beta' \tau_1^4, \quad 1 - \tau_1^2 \beta' = \frac{\beta \beta' \delta^2 \tau_1^8}{4(1 + \beta \beta' \tau_1^4)}.$$

Setzen wir für $1/\tau_1^2$ seinen Werth nach (7), so erkennt man, dass γ klein wird von der Ordnung δ^2 . Geht man bis auf erste Ordnung in δ^2 und berücksichtigt die Beziehung (3), so folgt:

$$\gamma = \frac{1}{4} \delta^2 \frac{M}{M + m}, \quad a p^2 = \frac{M + m}{m}.$$

Bezeichnet a_0 das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_0 des Lichtes im leeren Raume, so ist nach (5)

$$a_0 p^2 = n^2.$$

Daher nach (9) der Grenzwert n_∞^2 für sehr lange Wellen:

$$(10) \quad n_\infty^2 = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{M + m}{m},$$

während für den Grenzwert k_∞ des Schwächungscoefficienten k nach (5) folgt:

$$(11) \quad k_\infty = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{V_0} \cdot \frac{M}{\sqrt{m(M + m)}}.$$

Es ist also thatsächlich k_∞ sehr klein, n_∞ endlich.

Da γ , wie die erste der Formeln (9) lehrt, sehr klein ist, so werden nach Gleichung (2) die Molecüle wesentlich nur durch ihre relativen Verschiebungen gegen den Aether in ihre Ruhelage getrieben. Für sehr langsame Bewegungen würden Aether und Materie nahezu relativ ruhen, d. h. letztere würde ersteren sozusagen mitführen. Diese Anschauung wird durch neuere Untersuchungen¹⁾, welche direct dazu angestellt sind, um von der relativen Bewegung des Aethers gegen die Materie, z. B. die Erde, Kenntniss zu erhalten, unterstützt.

Verallgemeinert man die Formel (10) auf den Fall, dass mehrere Arten schwingungsfähiger Molecüle im Körper vorhanden sind, was nach einer entsprechenden Verallgemeinerung der Grundgleichungen (1) und (2) leicht geschehen kann, so würde man erhalten:

$$(10') \quad n_x^2 = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{m + \sum M_h}{m}$$

Macht man die Annahme, dass der Werth von a nur infolge einer Verdichtung des Aethers zwischen den Molecülen von dem Werthe von a_0 verschieden ist, so ist $a_0 : a = m : m_0$, falls m_0 die Dichtigkeit des Aethers im leeren Raume bezeichnet. Es wird dann

$$(10'') \quad n_x^2 = \frac{m + \sum M_h}{m_0},$$

d. h. der Grenzwert des Quadrates des Brechungsindex für sehr langsame Schwingungen ist gleich dem Verhältniss der gesammten an den Schwingungen theilnehmenden Masse eines bestimmten Körpervolumens zu der Masse des Aethers, welche in dem gleichen Volumen des leeren Raumes enthalten ist.

Untersuchen wir jetzt die Frage, welchen Werth der Brechungsexponent für Wellen von der Dauer der Lichtschwingungen bei Körpern mit normaler Dispersion besitzen muss. Da man diese als einen Specialfall der anomalen Dispersion auffasst, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass die Dauern der Eigenschwingungen der Molecüle nicht mit den Schwingungsdauern sichtbaren Lichtes zusammenfallen, so muss sich nach (8) das allgemeinste Dispersionsgesetz ergeben, wenn

1) Vgl. Des Coudres, Wied. Ann. 38. p. 71. 1889.

man diese Gleichungen nur für den Fall beliebig vieler Molecularten erweitert.

Da τ sich wesentlich von jedem τ_h , welches einer Eigenschwingung entspricht, unterscheidet, so kann man in (8) δ^2/τ^2 gegen $(1/\tau_1^2 - 1/\tau^2)^2$ vernachlässigen, und ebenso p'^2 gegen p^2 . Es folgt dann aus (8), unter Rücksicht auf die Beziehung (7) mit Vernachlässigung von γ nach (9) für mehrere Molecularten:

$$a_0 p^2 = n^2 = \frac{a_0}{a} \left\{ 1 + \tau^2 \sum \frac{\beta_h \tau_h^2}{\tau^2 - \tau_h^2} \right\}.$$

Sondert man die Absorptionsgebiete im Ultravioletten (Index v , $\tau_v < \tau$) von den Absorptionsgebieten im Ultrarothem (Index r , $\tau_r > \tau$), so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$n^2 = \frac{a_0}{a} \left\{ 1 + \sum_v \frac{\beta_v \tau_v^2}{1 - \frac{\tau_v^2}{\tau^2}} - \sum_r \frac{\beta_r \tau^2}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_r^2}} \right\};$$

oder mit Entwicklung nach Potenzen von τ_v/τ , resp. τ/τ_r und mit Weglassung von kleineren Gliedern:

$$(12) \quad n^2 = \frac{a_0}{a} \left\{ -\tau^2 \sum \beta_r + 1 + \sum \beta_v \tau_v^2 + \frac{\sum \beta_v \tau_v^4}{\tau^2} + \frac{\sum \beta_v \tau^6}{\tau^4} \right\}.$$

Diese Formel ist mit der anfangs erwähnten Dispersionsformel (I) identisch. Es ist sonach erklärt, weshalb die in ihr auftretenden Coefficienten A, B, C, D positiv sein müssen. Speciell folgt für B nach (12), (7) und (3):

$$B = \frac{a_0}{a} (1 + \sum \beta_v \tau_v^2) = \frac{a_0}{a} \frac{m + \sum M_v}{m};$$

daher nach (10'):

$$(13) \quad n_\infty^2 - B = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{\sum M_r}{m},$$

oder falls $a_0 : a = m : m_0$:

$$(13') \quad n_\infty^2 - B = \frac{\sum M_r}{m_0}.$$

Acceptirt man das Resultat der electromagnetischen Theorie, nach der n_∞^2 gleich der Dielectricitätsconstanten ist, so erzielt man daher den Satz:

Die Differenz zwischen den Dielectricitätsconstanten und dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten eines Körpers (genauer dem von T unabhängigen Gliede der Dispersionsformel) ist gleich dem Verhältniss der in einem Körpervolumen enthaltenen

so kann man annehmen, dass die \mathfrak{X}_h gewisser Eigenschwingungen fähig sein sollen, sei es nun deshalb, weil sie sozusagen an der ponderablen Materie haften, sodass ihre Eigenschwingungen mit denen der \mathfrak{X}_h identisch sind, sei es deshalb, weil jeder Körper gewisse Eigenschwingungen seines electricischen Zustandes besitzt, deren Dauer aus seiner Selbstinduction und Capacität zu berechnen ist. Nach beiden Anschauungen müssen zwischen den \mathfrak{X}_h und X Differentialgleichungen der Form bestehen:

$$(17) \quad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} = \epsilon_h X,$$

wobei sämtliche Coefficienten a_h , b_h , ϵ_h positiv sind. Für sehr langsame Zustandsänderungen geht daher die Formel (16) in die zweite von (15) über, falls gesetzt wird

$$(18) \quad \epsilon = 1 + \sum \epsilon_h.$$

Um die Abhängigkeit der magnetischen Polarisationen von ihren Kräften kümmern wir uns nicht weiter, es genügt, zu wissen, dass für Lichtschwingungen $\mu = 1$ sein muss bei allen Körpern.

Für periodische Bewegungen mit der Periode $T = \tau / 2\pi$ wird die Gleichung (17) zu

$$\mathfrak{X}_h = X \frac{\epsilon_h}{1 + i \frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} = X \cdot \epsilon_h(\tau),$$

falls $\epsilon_h(\tau)$ eine Abkürzung ist. Es wird daher nach (16)

$$\mathfrak{X} = X \left(1 + \sum \epsilon_h(\tau) \right).$$

Gerade wie sich nach den ursprünglichen Gleichungen $n^2 = \epsilon$ gibt, folgt daher hier

$$(19) \quad n^2 = 1 + \sum \epsilon_h(\tau),$$

wobei die Gleichungen bestehen:

$$(20) \quad \epsilon_h(\tau) = \frac{\epsilon_h}{1 + i \frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}}.$$

ϵ_h bedeutet gewissermaassen die Dielectricitätsconstante der bestimmten Molecülgattung und bestimmt die Polarisation derselben bei langsamen Zustandsänderungen. Es möge daher ϵ_h als „Polarisationsconstante“ der h ten Molecülgattung bezeichnet werden.

b_h steht in einfachem Zusammenhange mit der Eigenschwingungsdauer T_h oder τ_h . Nimmt man wiederum an, dass dieselben nur im Ultraviolett (τ_v, ϵ_v) und im Ultraroth (τ_r, ϵ_r) lägen, so erhält man aus (19) und (20) durch Reihenentwickelungen eine ganz ähnliche Dispersionsformel, wie die Formel (12) der mechanischen Theorie ist. Ueberhaupt gehen die Formeln beider Theorien völlig ineinander überein, wenn man setzt:

$$\epsilon_h = M_h : m, \quad a_0 = a.$$

Hätte man anstatt (16) den allgemeineren Ansatz

$$\mathfrak{K} = \epsilon_0 X + \sum \mathfrak{K}_h$$

gemacht, d. h. würde man annehmen, dass die Polarisationsconstante ϵ_0 des Aethers innerhalb eines Körpers von der des freien Aethers ($\epsilon_0 = 1$) verschieden ist, so lässt sich völlige Identität der mechanischen und electricischen Theorie erreichen, falls man setzt:

$$a_0 : a = m : m_0, \quad \epsilon_h = M_h : m_0, \quad \epsilon_0 = m : m_0.$$

Es ist daher auch eine innere Identität beider Theorien zu ermöglichen, falls man einerseits die Moleculmasse M_h als verdichtete Aethermasse selbst auffasst, andererseits die electricische Polarisation als Verschiebung des Aethers auffasst, diesem aber in verschiedenen Körpern und in demselben Körper an verschiedenen discreten Stellen (den Orten der Molecüle) verschiedene Dichte beilegt.

Unabhängig von diesen Speculationen ergibt sich jedenfalls aus (18) und (19):

$$\epsilon - B = \sum \epsilon_r,$$

wobei B das von T^2 unabhängige Glied der Dispersionsformel (I) bedeutet, d. h. falls man B schlechtweg den optischen Brechungsexponenten eines (normal dispergirenden) Körpers nennt, so erhält man den Satz:

Die Differenz zwischen der Dielectricitätsconstanten und dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten ist gleich der Summe der Polarisationsconstanten der Molecularten, deren Eigenschwingungen im Ultraroth liegen.

Um die optischen und electricischen Eigenschaften der

Metalle unter ein System von Gleichungen fassen zu können, genügt noch nicht die Erweiterung von (14) in:

$$(14') \quad A \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} + A \cdot 4\pi\lambda \frac{\partial X}{\partial t},$$

während für \mathfrak{E} die Gleichung (16) bestehen bleibt.¹⁾ Man kann dadurch allerdings zu scheinbar negativen Werthen der Dielectricitätsconstanten gelangen, wenn Eigenschwingungen im Ultrarothem liegen, indes erhält man dann infolge des bedeutenden Werthes der electrostatisch gemessenen Leitfähigkeit λ zu grosse Werthe für das Product $n\lambda$, wie sie an Metallen nicht auftreten.²⁾ Ich glaube vielmehr, dass für Metalle in (14') noch ein Glied der Form

$$p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \frac{p}{A} \Delta X$$

zugefügt werden muss. Durch ein solches kann man durch passende Wahl von p die optischen Constanten der Metalle unter Benützung der Leitfähigkeit λ der Erfahrung entsprechend berechnen und erhält dabei einen grossen positiven Werth für ihre Dielectricitätsconstante, wie H. A. Lorentz³⁾ zeigte. — Physikalisch kann die Form des genannten Zusatzgliedes erklärt werden, wenn man annimmt, dass die Polarisation in irgend einem Raumpunkte nicht nur von der dort herrschenden Kraft abhängt, sondern infolge der endlichen Ausdehnung der Molecüle auch von der Kraft in benachbarten Raumpunkten. Dann muss nämlich die Polarisation auch von den Differentialquotienten der Kräfte nach den Coordinaten abhängen. — Die ersten Differentialquotienten können nur bei dissymmetrischen Medien bestehen und ergeben dann eine völlig ausreichende Erklärung und Berechnung der optischen Erscheinungen in natürlich activen Medien, während die zweiten Differentialquotienten in Metallen auftreten.

Göttingen, December 1892.

1) In ähnlicher Weise verfährt Goldhammer l. c.

2) Vgl. P. Drude, Gött. Nachr. 1892. 10. p. 390.

3) H. A. Lorentz, Schlöm. Zeitschr. 23. p. 209. 1878.

IX. Zur Polarisation des ungebeugten Lichtes durch Gitter; Notiz von H. E. J. G. du Bois.

Hr. Quincke leitet eine Notiz „Ueber das Verhalten des polarisirten Lichtes bei der *Beugung*“¹⁾, welche sich in der Hauptsache auf zwei Abhandlungen von Hrn. K. Exner bezieht, mit einem Hinweis auf meine Arbeit über „Reflexion und Transmission des Lichtes durch gewisse äolotrope Gebilde“²⁾ ein. Hinsichtlich dieser bemerkt er dann Folgendes: „Ich erlaube mir darauf hinzuweisen, dass ich eine grosse Reihe ähnlicher Versuche in meinen optischen Experimentaluntersuchungen³⁾ beschrieben habe.“

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei es mir gestattet, hinsichtlich dieses Passus Folgendes zu erwidern: Der zweite Theil meiner oben angeführten Arbeit behandelt ausschliesslich den Einfluss von Gittern auf das *ungebeugt senkrecht* hindurchgegangene oder reflectirte Licht, also auf diejenigen Strahlen, welche zum sogenannten „Centralbilde“ sich vereinigen. Dies ist überall ausdrücklich hervorgehoben worden; im ganzen kamen bisher etwa 20 Gitter, der verschiedensten Art zur Untersuchung. Dagegen habe ich l. c. § 21 kurz die ausgedehnte Literatur erwähnt, welche sich auf die Polarisation des *gebeugten* Lichtes bezieht, welche mit den von mir speciell untersuchten Erscheinungen zwar Berührungspunkte hat, wovon sie aber andererseits wohl zu unterscheiden ist. Unter den dort citirten Autoren befindet sich auch Hr. Quincke, und unter den angeführten abnormen Erscheinungen die speciell von ihm beobachteten gefärbten Centralbilder. — Wenn ich dort statt in einem Paragraphen eine gedrängte Literaturübersicht zu geben, eine Discussion des gesammten vorliegenden höchst umfangreichen Beobachtungsmaterials hätte versuchen wollen, so wäre der Umfang der betreffenden Arbeit verdoppelt oder verdreifacht worden, was mir nicht erwünscht schien.

1) Quincke, Wied. Ann. 47. p. 765. 1892.

2) du Bois, Wied. Ann. 46. p. 542. 1892.

3) Quincke, XV. Ueber Beugungsgitter, Pogg. Ann. 146. p. 1. 1872. Und XVI. Ueber d. Verh. des pol. Lichtes bei der *Beugung*, Pogg. Ann. 149. p. 273. 1873. Auch Gött. Nachr. 1873. p. 22.

Wie schon aus ihrer Ueberschrift hervorgeht, beschäftigt sich die zweite der citirten Arbeiten von Hrn. Quincke in weit überwiegendem Maasse mit der Polarisation des *gebeugten* Lichtes. Allerdings sind unter der grossen Zahl von Beobachtungen auch solche mit verzeichnet, welche sich auf das „Centralbild“ beziehen und deren Einzelheiten l. c. (speciell § 103) nachzusehen sind ¹⁾; diese letzteren wären vielleicht passender an einer anderen Stelle meiner Arbeit nochmals besonders erwähnt worden. Aus ihnen schloss Hr. Quincke u. a., dass sich bei unter 45° zur Gitterstrichrichtung „gekreuzten“ Nicols im allgemeinen keine Auslöschung, sondern Färbung zeigte; dass dementsprechend bei spectraler Zerlegung ein schwarzer Streifen im Spectrum entstand. Auch wurden Drehungen gemessen, einmal mit Hülfe dieses Streifens, dann auch im angenähert monochromatischem Lichte, welches durch Zwischenschieben rother oder blauer Gläser erhalten wurde. Aus der Menge der Beobachtungen wird folgender Schluss besonders hervorgehoben (l. c. p. 295).

„Nach den vorstehenden Versuchen überwiegt also für eine Reihe von Gittern bei dem direct hindurchgegangenen Licht (dem centralen Bilde entsprechend) im rothen Ende des Spectrums die Amplitude \parallel , im blauen Ende des Spectrums die Amplitude \perp zur Hauptbeugungsebene polarisirt. Bei einer anderen Reihe von Gittern ist es umgekehrt. Der Unterschied ist im allgemeinen um so grösser, je mehr Ränder oder Oeffnungen auf den wirksamen Theil des Gitters kommen, der noch Licht zum Auge sendet.“

Dieser allgemeine Satz schildert eine Mannigfaltigkeit von Erscheinungen und umfasst eine grosse Anzahl der überhaupt denkbaren Verhältnisse. Dem gegenüber möchte ich mir erlauben, die verhältnissmässig einfachen Ergebnisse nochmals zusammenzufassen, welche ich, wenigstens bei blanken Metallgittern, feststellen konnte; das überwiegende Interesse dieser geometrisch wie physikalisch scharf definirbaren Gitterart habe ich in meiner Arbeit wiederholt betont, namentlich in Bezug auf deren Analogie mit den Hertz'schen Gittern für die Polarisation electromagnetischer Strahlung.

1) Die kurze Zusammenstellung der Hauptresultate Hrn. Quincke's in den Gött. Nachr. für 1873 p. 22, war mir bisher leider entgangen.

1. Bei einem Silberdrahtgitter wurde die Drehung der Polarisationsebene für monochromatisches (Natron) Licht bei verschiedenen Incidenzazimuthen gemessen und gefunden, dass sie dem Sinus des doppelten Azimuths proportional verläuft. Erst daraus lässt sich folgern, dass es sich um ein constantes, numerisch angebbares, Verhältniss zwischen den Durchlässigkeiten für \parallel oder \perp zur Drahtrichtung polarisirtes Licht handelt.

2. Jenes Verhältniss wurde als Function der Wellenlänge und der scheinbaren Oefnungsbreite des Gitters innerhalb gewisser Grenzen bestimmt.

3. Ein Umkehrpunkt im Vorzeichen der Erscheinung wurde zwischen dem blauen und rothen Ende des Spectrums nicht beobachtet; vielmehr wurde im ganzen sichtbaren Gebiet das \perp zur Drahtrichtung polarisirte Licht in grösserer Intensität durchgelassen. Ein solcher Umkehrpunkt tritt erst im Ultraroth auf, wie ich neuerdings in Gemeinschaft mit Hrn. Rubens fand¹⁾; für noch grössere Wellenlängen überwiegt dann die \parallel der Drahtrichtung polarisirte Componente.

4. Bei denjenigen Metallen (Gold, Platin, Eisen), welche bisher ausser Silber noch untersucht wurden, ergab sich qualitativ das gleiche Verhalten, und zwar wurden bisher im hiesigen Institut an sechs ganz verschiedenen Metalldrahtgittern Beobachtungen angestellt.

Diese wenigen Bemerkungen werden, wie ich glaube, darlegen, dass meine Arbeit kaum als eine blosser Wiederholung bereits beschriebener Versuche aufzufassen ist, wie etwa aus dem eingangs citirten Passus gefolgert werden könnte. Dass ich eine ganz neue Erscheinung zu beschreiben wähnte, habe ich nirgends behauptet; im Gegentheil habe ich die Hrn. Fizeau, J. Fröhlich, G. Quincke, Gouy, W. Wien citirt und erkenne deren Priorität im vorwiegend qualitativ beschreibenden Stadium auf dem vorliegenden Gebiete vollständig an. Auf den ferneren Inhalt der Notiz von Hrn. Quincke, welcher sich gegen Hrn. K. Exner wendet, kann es nicht meine Aufgabe sein, hier weiter einzugehen.

Berlin, Physikal. Inst. der Univ., 15. Februar 1893.

1) du Bois u. Rubens, Berl. Ber. p. 1120. December 1892.